



**Уральский  
федеральный  
университет**

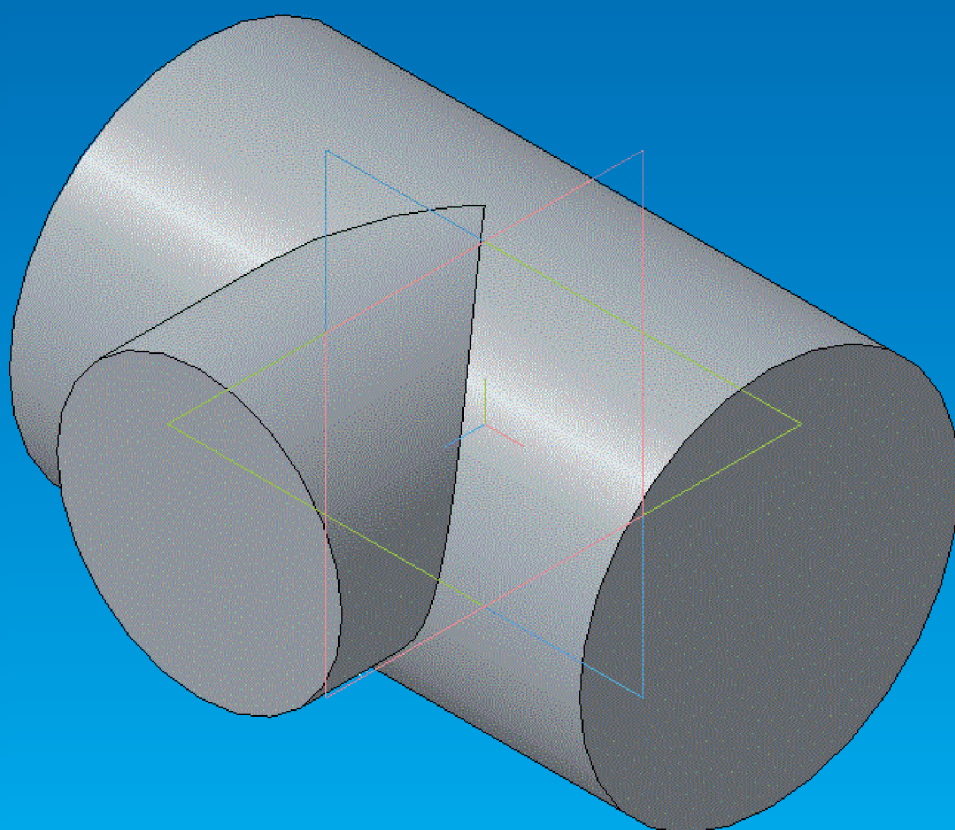
имени первого Президента  
России Б.Н. Ельцина

**Институт  
фундаментального  
образования**

**Т. И. СИДЯКИНА  
Л. Ю. СТРИГАНОВА**

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие





Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

**Т. И. Сидякина, Л. Ю. Стриганова**

# **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

*Учебное пособие*

Рекомендовано методическим советом  
Уральского федерального университета  
для студентов вуза, обучающихся  
по направлению подготовки 54.03.01 — Дизайн

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2017

УДК 744.4(075.8)

ББК 30.11я73

С34

Рецензенты:

заведующий кафедрой технологии и экономики доктор физико-математических наук *О. А. Чикова* (Уральский государственный педагогический университет);  
доктор технических наук, профессор *А. П. Комиссаров* (Уральский государственный аграрный университет)

Научный редактор — кандидат технических наук *Н. В. Семенова*

**Сидякина, Т. И.**

С34 Начертательная геометрия : учеб. пособие / Т. И. Сидякина, Л. Ю. Стриганова. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 107, [1] с.  
ISBN 978-5-7996-2260-2

Пособие по дисциплине «Технический рисунок» содержит теоретический материал раздела начертательной геометрии, особо раскрывается тема взаимного пересечения поверхностей в ортогональных и аксонометрических проекциях, рассматриваются задачи для самостоятельного решения. В пособии представлены индивидуальные варианты заданий, требования к выполнению курсовой работы по дисциплине, вопросы для защиты и рекомендованная литература.

Издание предназначено для студентов института гуманитарного образования, обучающихся по направлению 54.03.01 — Дизайн, образовательным траекториям «Графический дизайн», «Промышленный дизайн».

Библиогр.: 9 назв. Табл. 2. Рис. 61. Прил. 6.

УДК 744.4(075.8)

ББК 30.11я73



# ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Графическая подготовка дизайнера в вузе основана на проектной деятельности, умении выполнять различные эскизы, рисунки пространственных форм, эргономические схемы, перспективные изображения. Целью этой подготовки является формирование личности, владеющей методами проектирования, конструирования, моделирования, обладающей пространственным мышлением и представлением, необходимым для творческой деятельности дизайнера.

Изображения можно разделить на два вида — художественные и технические. Художественные изображения рассматривают в курсах «Академический рисунок» и «Академическая живопись».

В процессе изучения дисциплин «Начертательная геометрия», «Инженерная графика» и «Технический рисунок» изображения выполняются на чертежах, эскизах или технических рисунках.

Начертательная геометрия является теоретической базой всех графических дисциплин. В процессе ее изучения рассматриваются геометрические пространственные формы в виде их изображений на плоскостях проекций.

В данном пособии представлены основные позиционные задачи, связанные с вопросами относительного расположения геометрических объектов. Особое внимание уделяется методу аксонометрических проекций, по правилам которых выполняются технические рисунки.

Для студентов института гуманитарных наук и искусств, обучающихся по направлениям «Графический дизайн» и «Промышленный дизайн», раздел начертательной геометрии входит в дисциплину «Технический рисунок» и изучается на первом курсе. Дисциплину «Инженерная графика» дизайнеры-промышленники изучают на старших курсах.

Целью данного пособия является оказание методической помощи студентам при изучении раздела начертательной геометрии, в решении задач и выполнении курсовой работы «Взаимное пересечение поверхностей в ортогональных и аксонометрических проекциях». Представленные алгоритмы вычерчивания графических листов могут быть основой для написания текста пояснительной записки, а образцы заданий помогут правильно скомпоновать изображения на листах форматов. В приложениях приводятся варианты заданий для курсовой работы с образцами их выполнения и оформления.

# 1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ. ВИДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

---

**В** основе выполнения всех изображений лежит метод проекций — графический метод получения на чертеже достоверного изображения, по которому можно представить форму и размеры реального объекта.

Проекцией называется изображение геометрического объекта, расположенного в пространстве, на плоскость проекций, которое получено при помощи проецирующих лучей, проходящих через каждую точку объекта до пересечения с плоскостью проекций.

## 1.1. Центральные проекции

---

Изображения на плоскости проекций получают при проведении проецирующих лучей через одну точку пространства  $S$  — центр проекций (рис. 1).

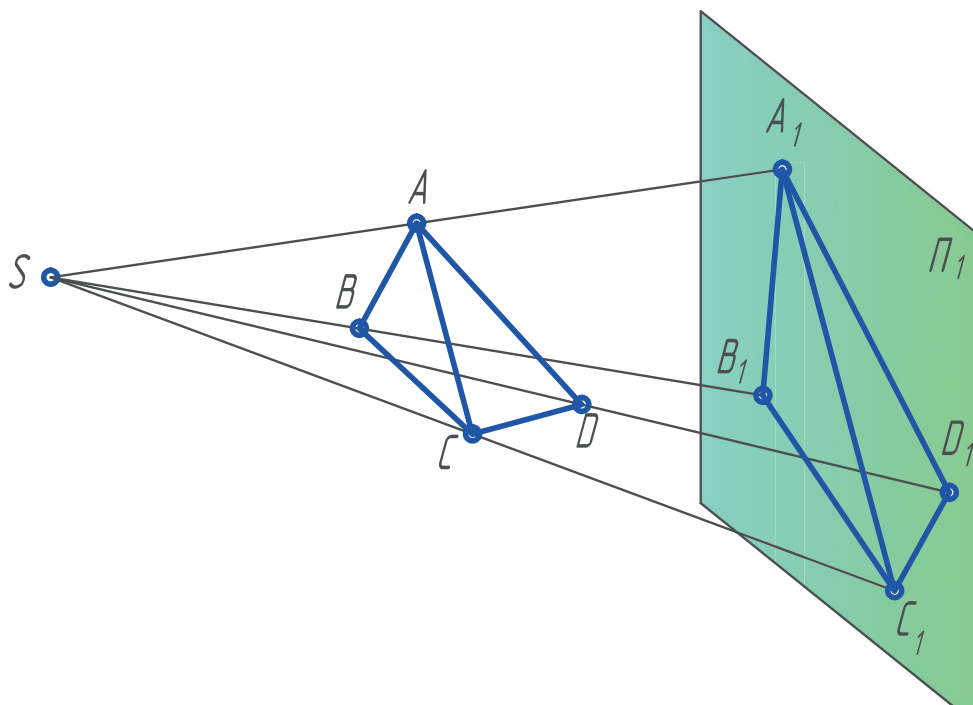


Рис. 1. Аппарат центрального проецирования

Центральные проекции — это наглядные изображения, зрительное восприятие которых адекватно зрительному восприятию самих объектов в пространстве. На основе аппарата центрального проецирования строятся перспективные изображения, которые применяются в строительстве, архитектуре, живописи, дизайн-проектах (рис. 2).

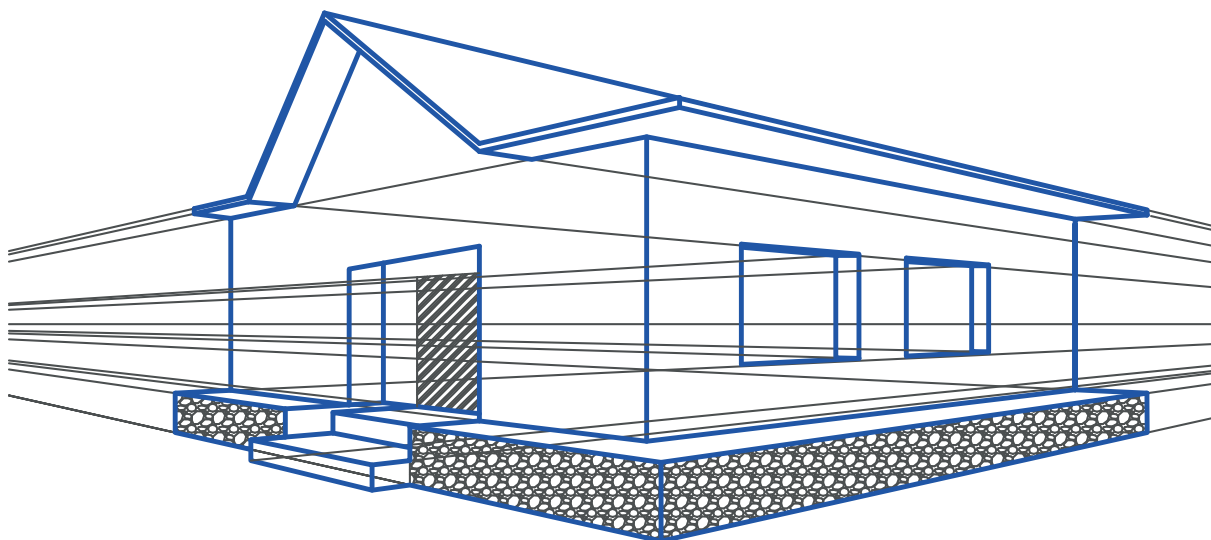


Рис. 2. Здание в перспективе

## 1.2. Параллельные проекции

Параллельное проецирование (рис. 3) является частным случаем центрального, когда центр проецирования удален в бесконечность, а проецирующие лучи параллельны некоторому направлению проецирования  $S$ .

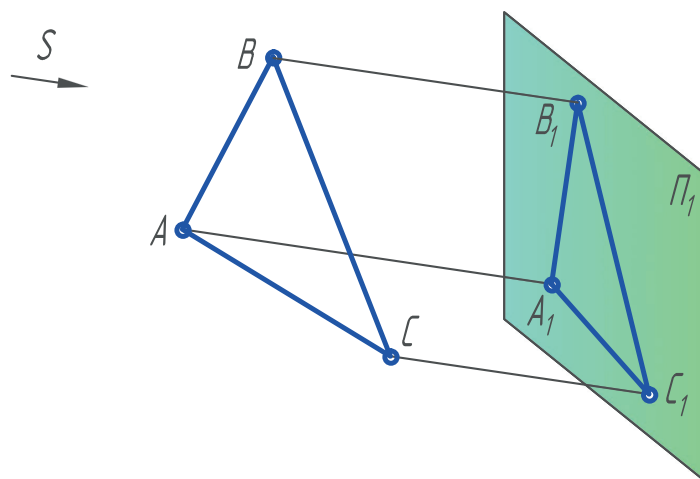


Рис. 3. Аппарат параллельного проецирования

В зависимости от направления проецирующих лучей по отношению к плоскости проекций, параллельное проецирование может быть косоугольным и прямоугольным, когда проецирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекций.

На основе аппарата параллельного проецирования строятся аксонометрические проекции — наглядные изображения, которые помогают чтению чертежа, выполненного в ортогональных проекциях.

Аксонометрические проекции — это параллельные проекции заданного геометрического тела вместе с координатной системой на аксонометрической плоскости проекций, выполняются в соответствии с ГОСТ 2.317–69 «Аксонометрические проекции». Они обладают хорошей наглядностью, удобоизмеримостью и простотой построения (рис. 4).

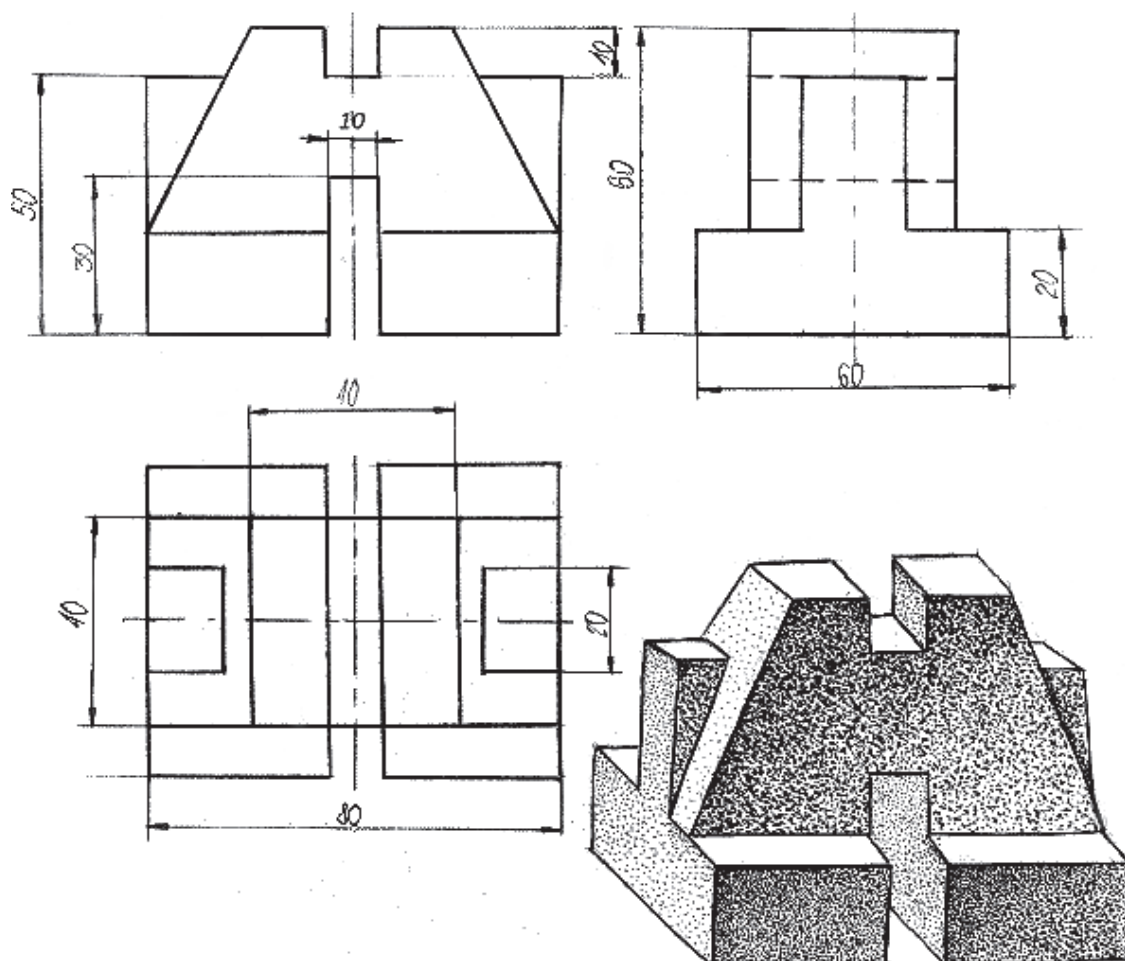


Рис. 4. Изображение детали

На рис. 4 представлены ортогональные проекции и технический рисунок детали, выполненные по правилам аксонометрических проекций.

### 1.3. Прямоугольное проецирование

Если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то такой метод проецирования называется прямоугольным, или ортогональным (*orto* — прямо), проецированием.

Прямоугольное проецирование лежит в основе выполнения эпюров и является единственным способом построения машиностроительных чертежей, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только этот вид проецирования.

## 2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ

---

**Д**ля создания чертежа (эпюра) используют три взаимно перпендикулярные плоскости и проецирующие лучи, перпендикулярные к ним. Одну из плоскостей проекций располагают горизонтально ( $\Pi_1$  — горизонтальная плоскость проекций), вторую и третью вертикально, перпендикулярно к первой ( $\Pi_2$  — фронтальная плоскость проекций,  $\Pi_3$  — профильная плоскость). Эти плоскости бесконечно удалены и непрозрачны (рис. 5).

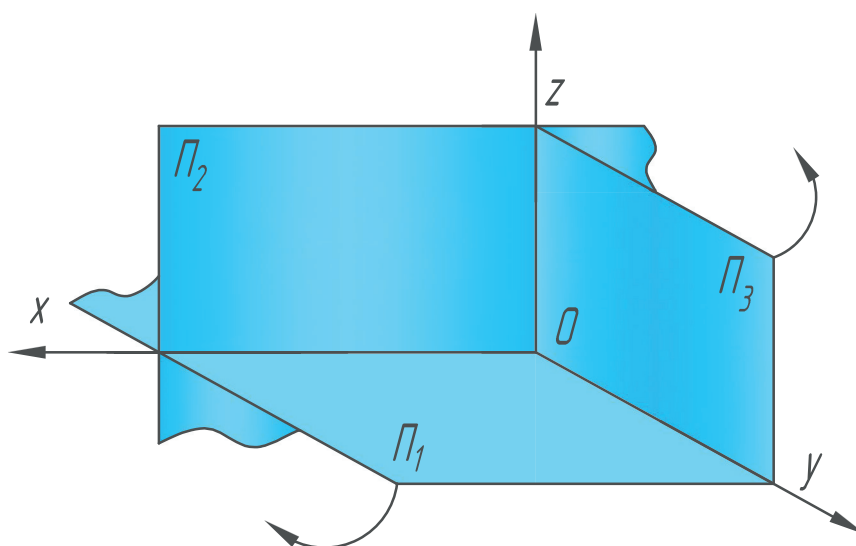


Рис. 5. Система плоскостей проекций

Плоскости проекций, попарно пересекаясь, образуют три оси:  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , — которые можно рассматривать как систему прямоугольных декартовых координат в пространстве с началом в точке  $O$ .

### 2.1. Ортогональные проекции точки

---

Чтобы получить комплексный чертеж точки (эпюр Монжа), совместим горизонтальную плоскость  $\Pi_1$  с фронтальной плоскостью  $\Pi_2$  вращением вокруг оси  $Ox$ , профильную плоскость  $\Pi_3$  совместим с фронтальной вращением вокруг оси  $Oz$ . В результате три

проекции точки окажутся на одной прямой  $A_1A_2$ ;  $A_2A_3$ ;  $A_1A_3$ , которые перпендикулярны осям проекций. Эти прямые называются линиями проекционной связи (рис. 6).

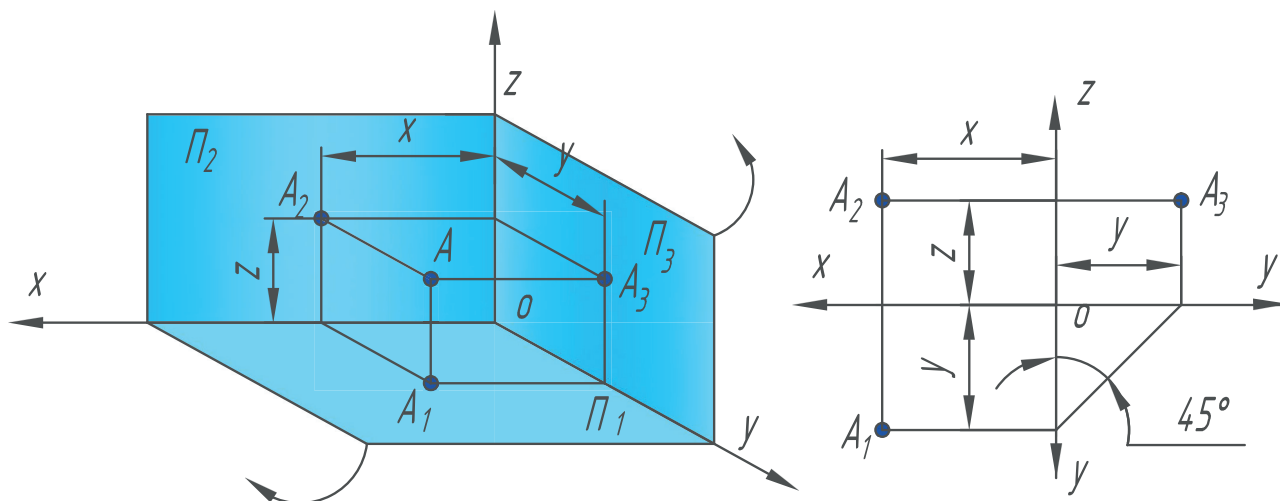


Рис. 6. Образование проекции точки

Положение точки в пространстве и на плоскости определяется по трем ее координатам — расстояниям от точки до плоскостей проекций, которые записываются в следующем порядке:  $A(x, y, z)$ .

Относительное расположение точек в пространстве определяется по их координатам. Например, в задаче положение точек может быть выражено следующим образом: точка  $A$  выше точки  $B$  на 13 мм, ближе точки  $B$  на 15 мм и левее точки  $B$  на 15 мм. Построить комплексный чертёж точек  $A$  и  $B$ , если координаты точки  $B(20, 10, 17)$ . Зная координаты точки  $B$ , можно определить координаты точки  $A(35, 25, 30)$  и построить эпюр (рис. 7).

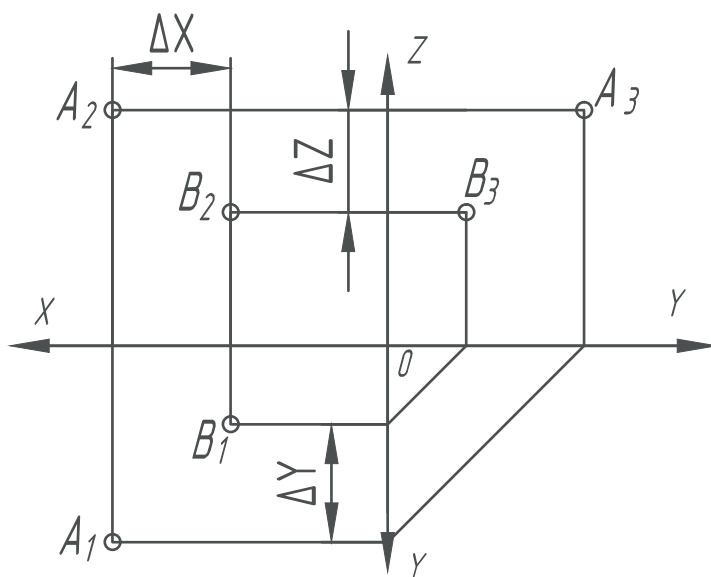


Рис. 7. Относительное расположение точек на эпюре

На рис. 7 показано относительное расположение точек на эпюре. Отрезки  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  называются разностью координат и характеризуют смещение точки  $A$  по отношению к точке  $B$ .

Точки в пространстве могут быть расположены на одной проецирующей прямой. Такие точки называются конкурирующими, на комплексном чертеже они будут находиться на одной линии проекционной связи (рис. 8).

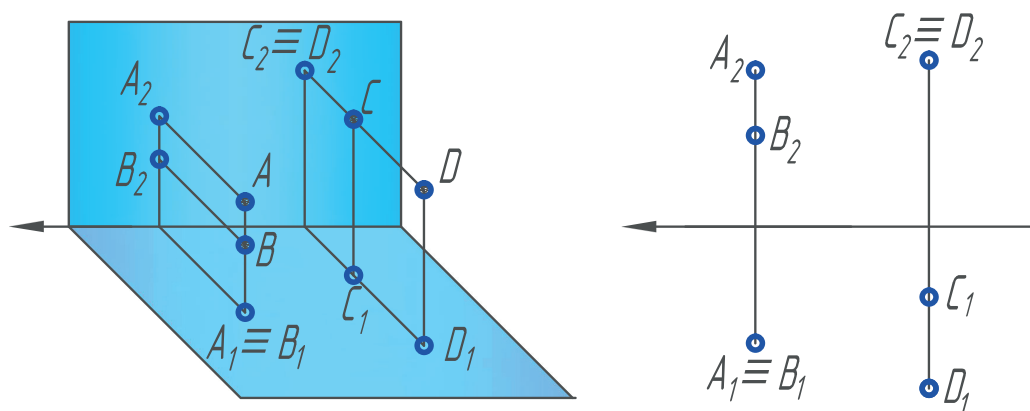


Рис. 8. Конкурирующие точки

Конкурирующие точки имеют большое значение в практике решения задач и построения эпюров, так как позволяют установить взаимную видимость различных геометрических образов.

## 2.2. Прямые общего и частного положений

Прямую линию можно задать двумя точками, например,  $A(50, 30, 15)$ ;  $B(10, 50, 40)$ , которые изображены на рис. 9. Этот способ задания прямой в пространстве и на плоскости вытекает из аксиомы: через две точки можно провести прямую и только одну.

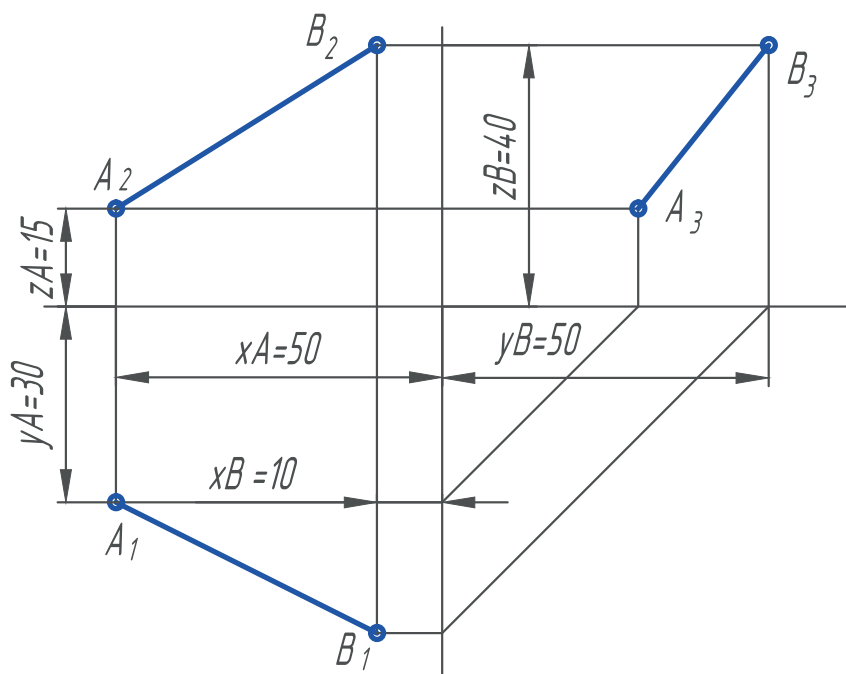


Рис. 9. Эпюр отрезка прямой

Построение третьей проекции отрезка прямой на профильной плоскости проекций проводится аналогично построению третьей проекции точки, т. е. с помощью биссекторной плоскости или циркуля.

Прямая в пространстве может занимать различные положения: общее и частное. Прямая общего положения не параллельна ни одной из трех плоскостей проекций. Под частным будем понимать такое положение прямой в пространстве, когда она параллельна или перпендикулярна одной или двум плоскостям проекций.

Если прямая перпендикулярна одной плоскости проекций, а двум плоскостям проекций параллельна, то она называется проецирующей.

Существует три семейства проецирующих прямых:

- горизонтально-проецирующие (перпендикулярные горизонтальной плоскости проекций — рис. 10);
- фронтально-проецирующие (перпендикулярные фронтальной плоскости проекций — рис. 11);
- профильно-проецирующие (перпендикулярные профильной плоскости проекций — рис. 12).

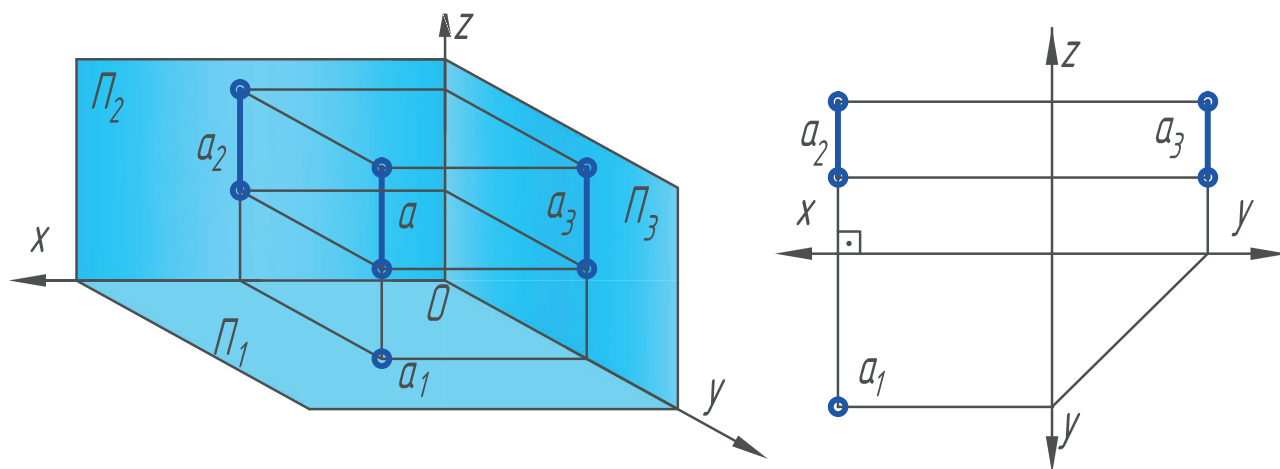


Рис. 10. Горизонтально-проецирующая прямая

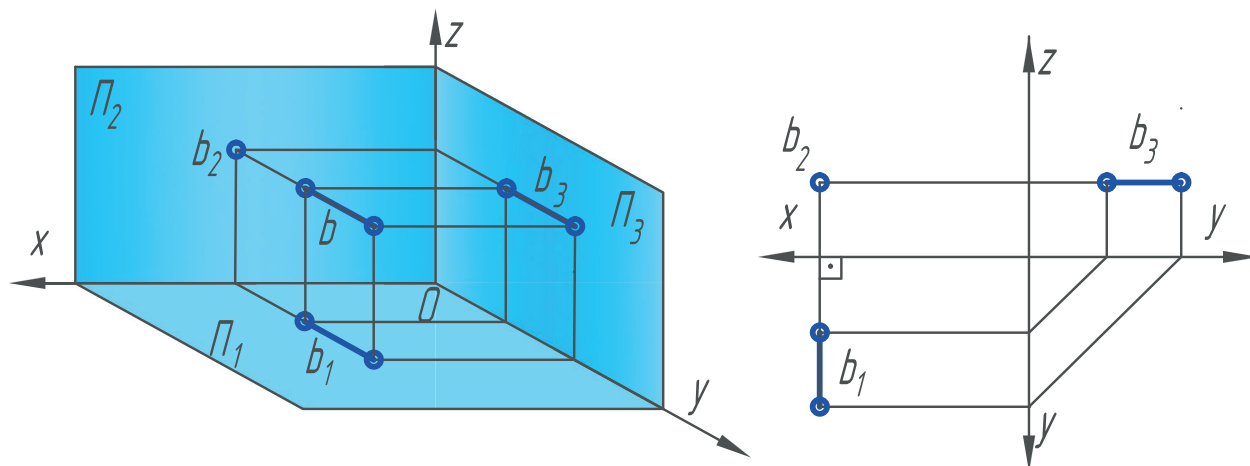


Рис. 11. Фронтально-проецирующая прямая



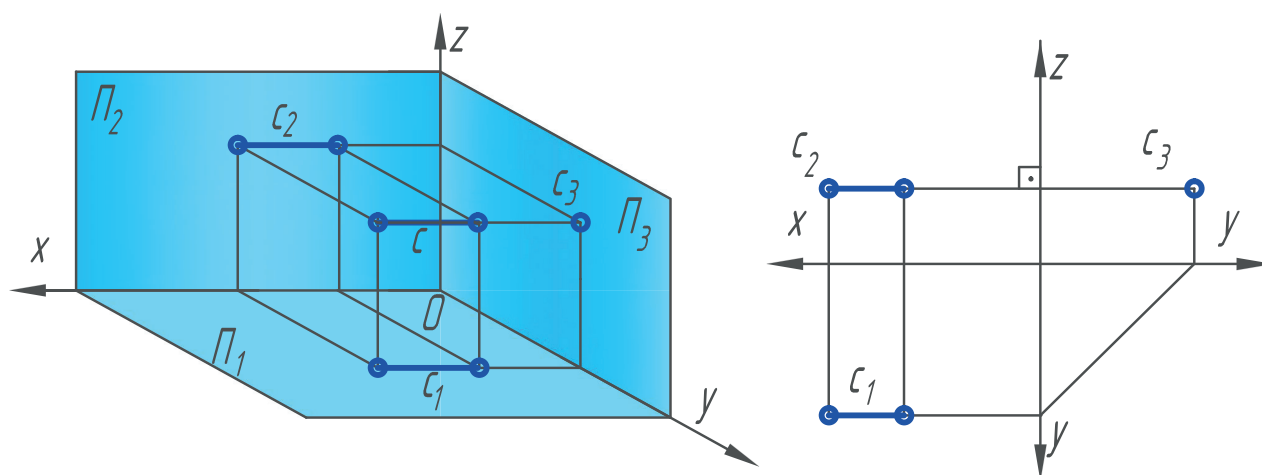


Рис. 12. Профильно-проецирующая прямая

Необходимо знать характерные особенности комплексного чертежа проецирующей прямой, а именно:

- проецирующая прямая на параллельные ей плоскости проекций проецируется в прямые, параллельные соответствующей координатной оси. При этом отрезок прямой проецируется в натуральную величину;
- проецирующая прямая на перпендикулярную ей плоскость проекций проецируется (вырождается) в точку.

Если прямая параллельна одной из плоскостей проекций, то ее называют линией уровня. Существует три семейства таких прямых:

- горизонтالي (прямые, параллельные горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ , — рис. 13);
- фронтالي (прямые, параллельные фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ , — рис. 14);
- профильные прямые (прямые, параллельные профильной плоскости проекций  $\Pi_3$ , — рис. 15).

Комплексный чертеж прямой уровня обладает следующими характеристиками:

- на непараллельные ей плоскости проекций прямая уровня проецируется в прямые, параллельные соответствующим координатным осям;
- отрезок прямой уровня проецируется на параллельную ей плоскость проекций в натуральную величину.

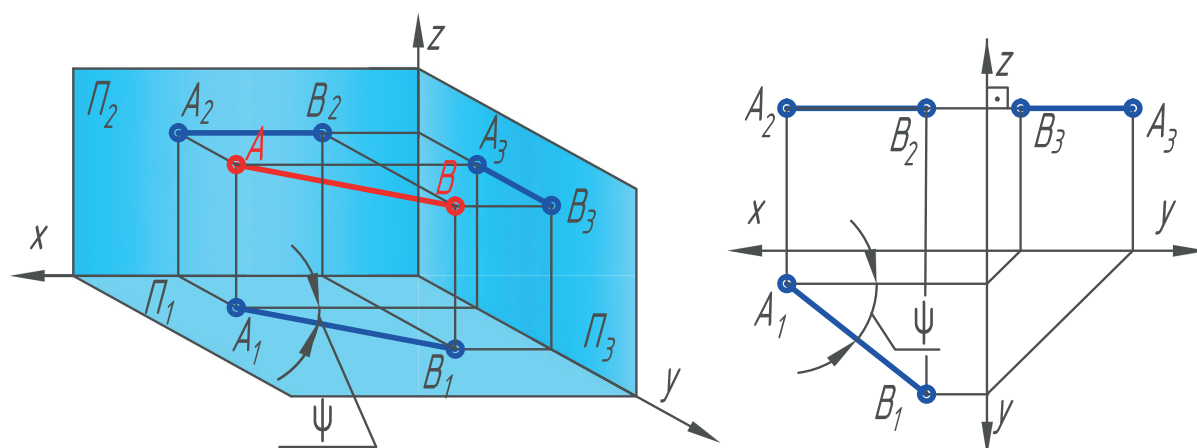


Рис. 13. Горизонтальная прямая уровня (горизонталь)

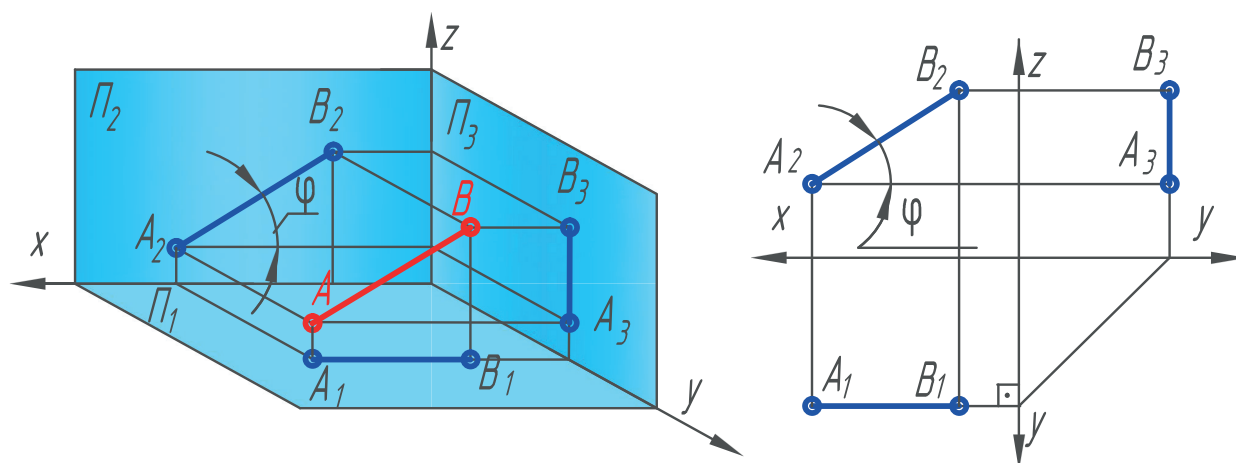


Рис. 14. Фронтальная прямая уровня (фронталь)

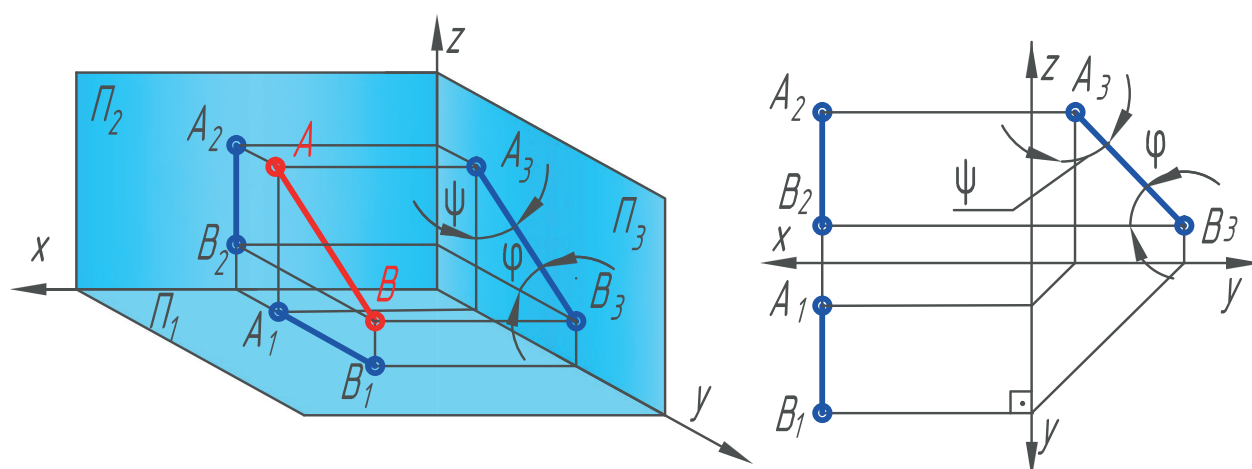


Рис. 15. Профильная прямая уровня

### 2.3. Следы прямой

Следом прямой называется точка пересечения прямой с плоскостями проекций. У прямой может быть три следа: горизонтальный, фронтальный и профильный. На рис. 16 построены горизонтальный след ( $N$ ) и фронтальный след ( $M$ ) прямой  $a$ .

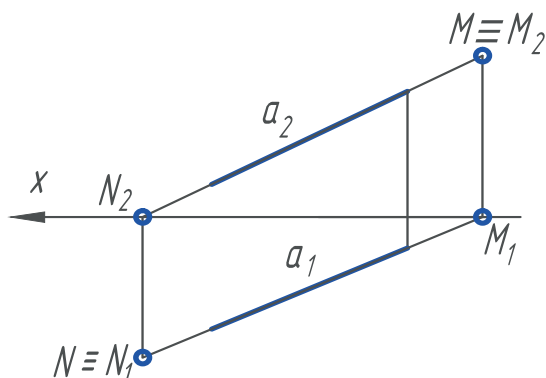


Рис. 16. Построение следов прямой линии

## 2.4. Относительное положение прямых

Рассмотрим свойства ортогонального проектирования. Если прямые в пространстве параллельны, то и их одноименные ортогональные проекции параллельны между собой (рис. 17).

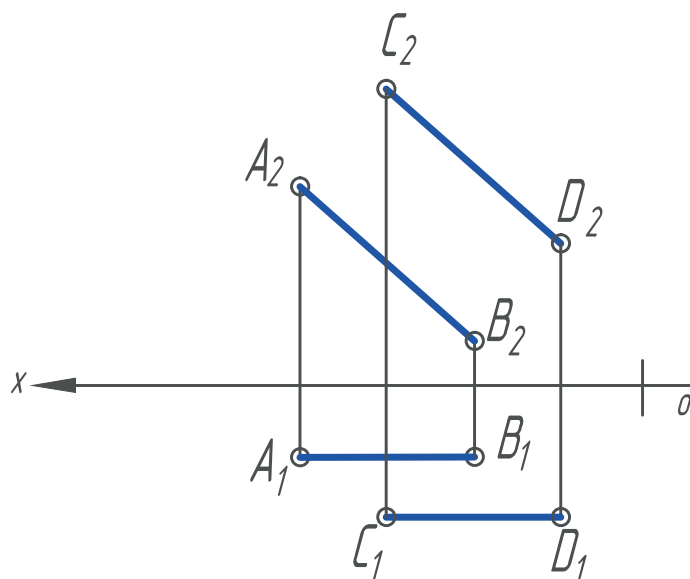


Рис. 17. Проекции параллельных прямых

Если прямые в пространстве пересекаются, то их проекции имеют одну общую точку (рис. 18).

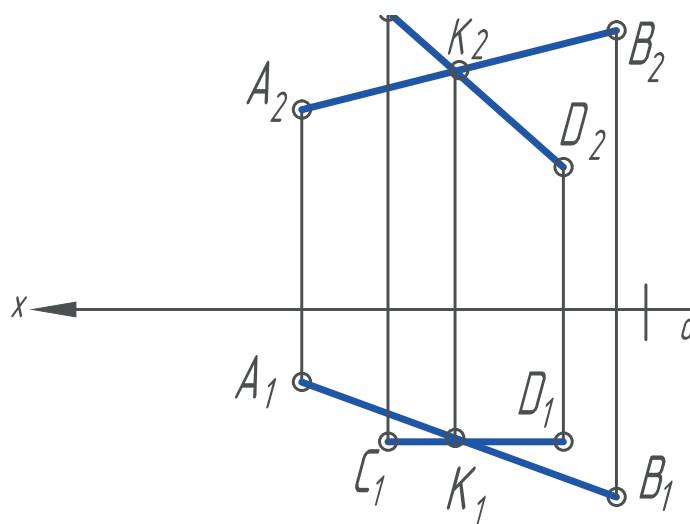


Рис. 18. Проекции пересекающихся прямых

Если прямые в пространстве скрещиваются, то они не имеют общих точек пересечения (рис. 19). Точки скрещивающихся прямых, проекции которых на одной из плоскостей проекций совпадают, называются конкурирующими. Они лежат на одной линии проекционной связи.

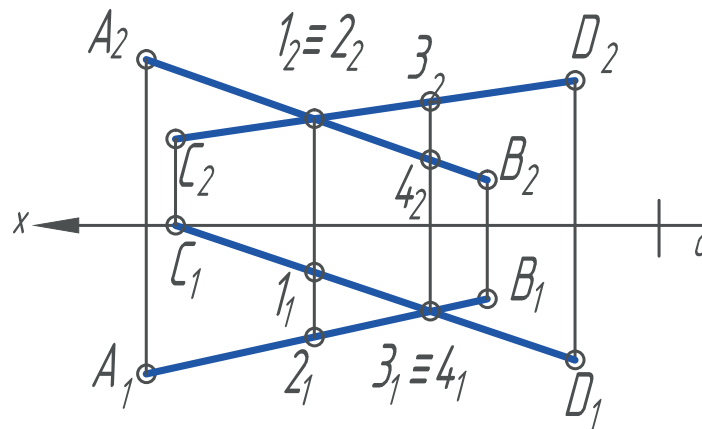


Рис. 19. Проекции скрещивающихся прямых

Точки 1 и 2 фронтально конкурирующие, 3 и 4 горизонтально конкурирующие (см. рис. 19). На плоскостях проекций они обозначены знаком совпадения (три параллельные прямые).

Частный случай пересекающихся прямых — взаимно перпендикулярные прямые (рис. 20). Проекции перпендикулярных прямых обладают свойством: если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а вторая ей неперпендикулярна, то прямой угол проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

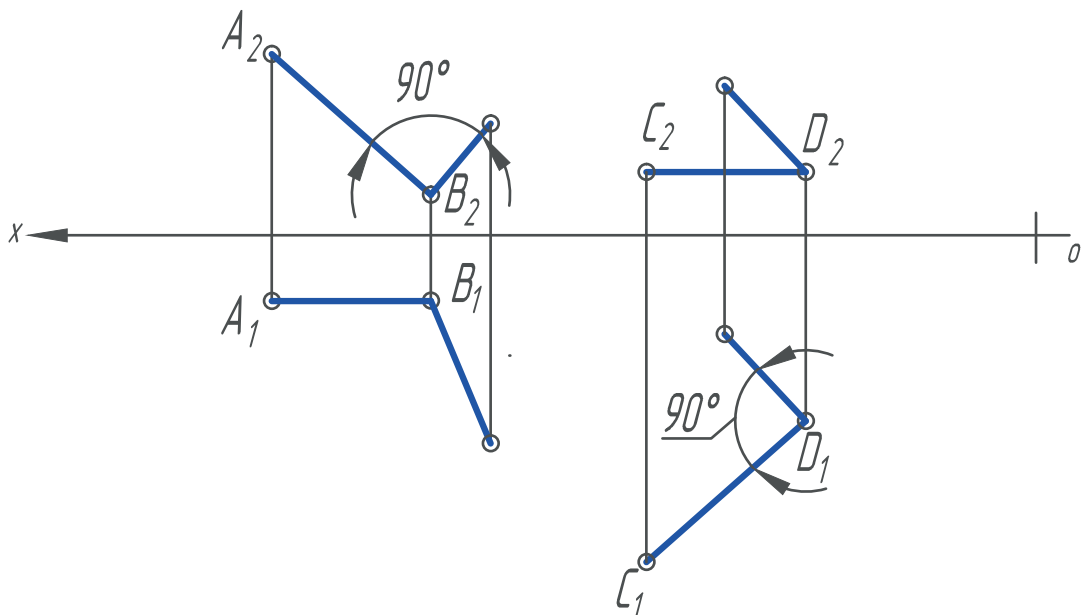


Рис. 20. Проекции перпендикулярных прямых

Это свойство проецирования прямого угла применяется в решении задач на построение плоских фигур, прямой, перпендикулярной плоскости (нормали), перпендикулярных плоскостей.

## Вопросы для самоконтроля

---

1. Какие основные способы проецирования геометрических объектов на плоскости вам известны?
2. Как образуется эпюр Монжа?
3. Что называется координатами точки?
4. Какие линии называются линиями проекционной связи?
5. Какие положения занимают прямые относительно плоскостей проекций?
6. Назовите свойства проекций проецирующих прямых, линий уровня.
7. Какие точки называются конкурирующими?
8. Как построить следы прямой?
9. Назовите свойства проекций параллельных, пересекающихся, скрещивающихся, перпендикулярных прямых.

### 3. ПЛОСКОСТЬ

При последовательном перемещении в пространстве прямой, проходящей через одну точку пространства и пересекающей другую прямую линию, получают плоскость (рис. 21).

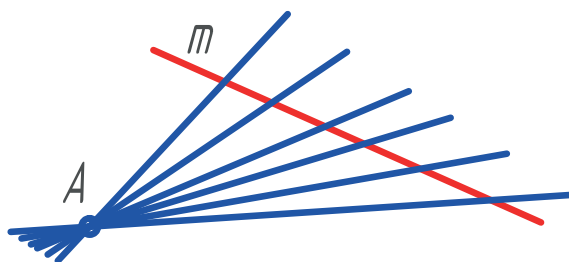


Рис. 21. Образование плоскости

Плоскостью также можно назвать множество точек, расположенных на одном уровне или любую геометрическую фигуру.

#### 3.1. Способы задания плоскости

Плоскость на эюре можно задать несколькими способами (рис. 22).

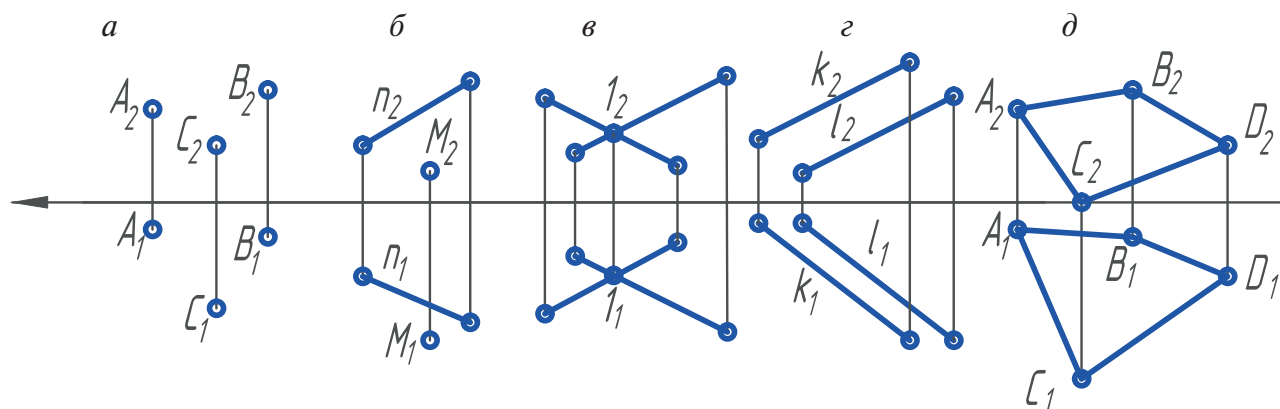


Рис. 22. Способы задания плоскости:

$a$  — тремя точками;  $б$  — прямой и точкой;  $в$  — пересекающимися прямыми;  
 $г$  — параллельными прямыми;  $д$  — геометрической фигурой

Каждый из представленных способов задания плоскости допускает переход к любому другому.

Плоскости в пространстве, как и прямые линии, занимают различное положение. Различают три типа положения плоскости относительно плоскостей проекций: плоскости общего положения, проецирующие плоскости и плоскости уровня (дважды проецирующие).

### 3.2. Плоскости общего положения. Следы плоскости

Положение плоскости относительно плоскостей проекций удобно определять по ее следам — прямым линиям, по которым данная плоскость пересекается с плоскостями проекций.

На рис. 23, а изображена плоскость в пространстве общего положения —  $\beta$ . Различают три следа плоскости:  $\beta_{\pi_1}$  — горизонтальный,  $\beta_{\pi_2}$  — фронтальный,  $\beta_{\pi_3}$  — профильный. Любые два следа плоскости, как две пересекающиеся прямые, вполне определяют положение плоскости в пространстве и на чертеже.

Третий след плоскости на эюре всегда можно построить по двум данным (рис. 23, б).

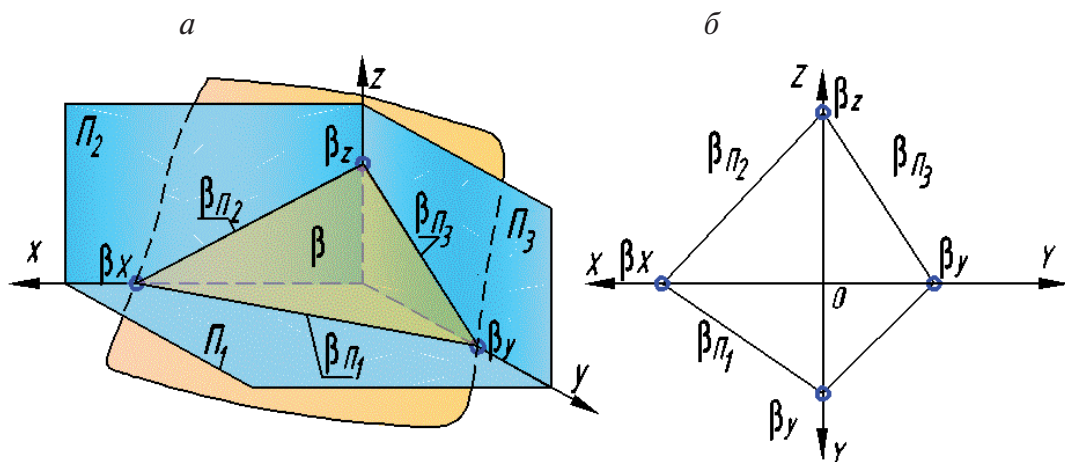


Рис. 23. Следы плоскости:

а — в пространстве общего положения; б — по двум данным

Следы плоскости общего положения  $\beta$  (рис. 23, а, б) попарно пересекаются на осях в точках  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_z$ . Эти точки называются точками схода следов.

Плоскость общего положения не перпендикулярна и не параллельна ни одной из плоскостей проекций. Соответственно плоскости частного положения либо параллельны, либо перпендикулярны плоскостям проекций.

### 3.3. Плоскости частного положения

Проецирующие плоскости перпендикулярны одной из плоскостей проекций. В зависимости от этого, их подразделяют на три вида: горизонтально-проецирующие, фронтально-проецирующие и профильно-проецирующие.

На рис. 24 изображена горизонтально-проецирующая плоскость  $\alpha$ , заданная треугольником  $ABC$  и следами. Горизонтальная проекция такой плоскости ( $A_1 B_1 C_1$ ) представляет собой прямую, которая одновременно является горизонтальным следом плоскости  $\alpha_{\Pi_1}$ .

Фронтальная проекция плоскости  $\alpha$  определяется проекцией треугольника  $A_2 B_2 C_2$  на эпюре, фронтальный след плоскости  $\alpha_{\Pi_2}$  расположен перпендикулярно оси  $x$ .

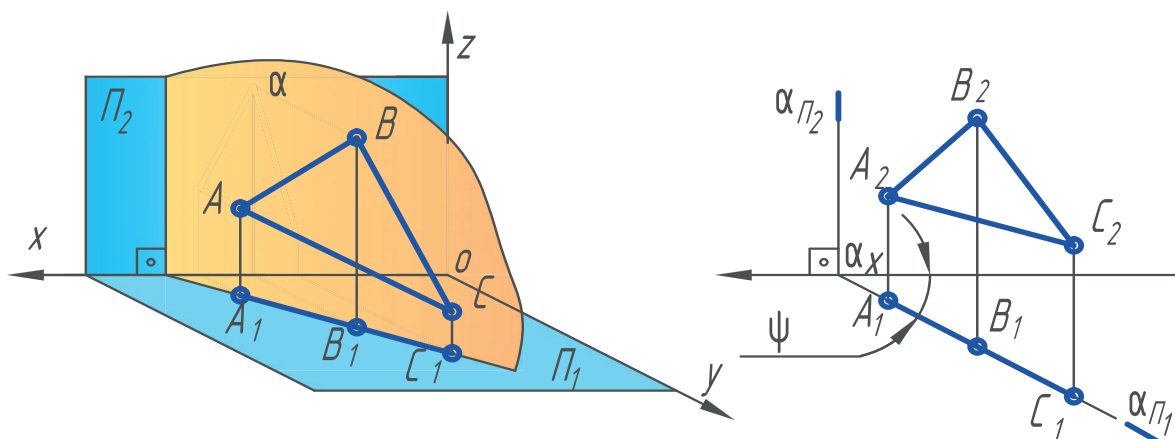


Рис. 24. Горизонтально-проецирующая плоскость

Угол  $\psi$ , который образуется между плоскостью треугольника  $ABC$  и  $\Pi_2$ , проецируется на плоскость  $\Pi_1$  без искажения и определяет угол наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций.

На рис. 25 изображен эпюр фронтально-проецирующей плоскости  $\beta$ , заданной треугольником  $MNK$ , который проецируется на фронтальную плоскость проекций в виде прямой линии ( $M_2 K_2 N_2$ ) и совпадает с фронтальным следом плоскости  $\beta_{\Pi_2}$ . Горизонтальный след плоскости  $\beta_{\Pi_1}$  перпендикулярен оси  $x$ .

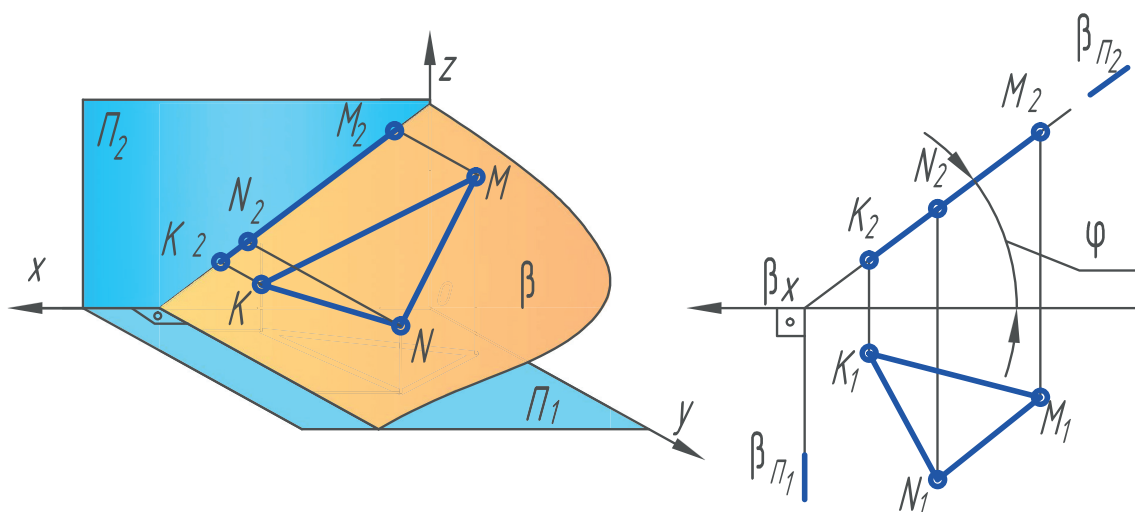


Рис. 25. Фронтально-проецирующая плоскость

Угол  $\phi$  между плоскостью треугольника и  $\Pi_1$  проецируется на  $\Pi_2$  без искажения и является углом наклона плоскости  $MNK$  к горизонтальной плоскости проекций.



Эпюр профильно-проецирующей плоскости  $\beta$ , заданной треугольником  $ABC$ , представлен на рис. 26. Горизонтальный и фронтальный следы данной плоскости перпендикулярны соответствующим осям.

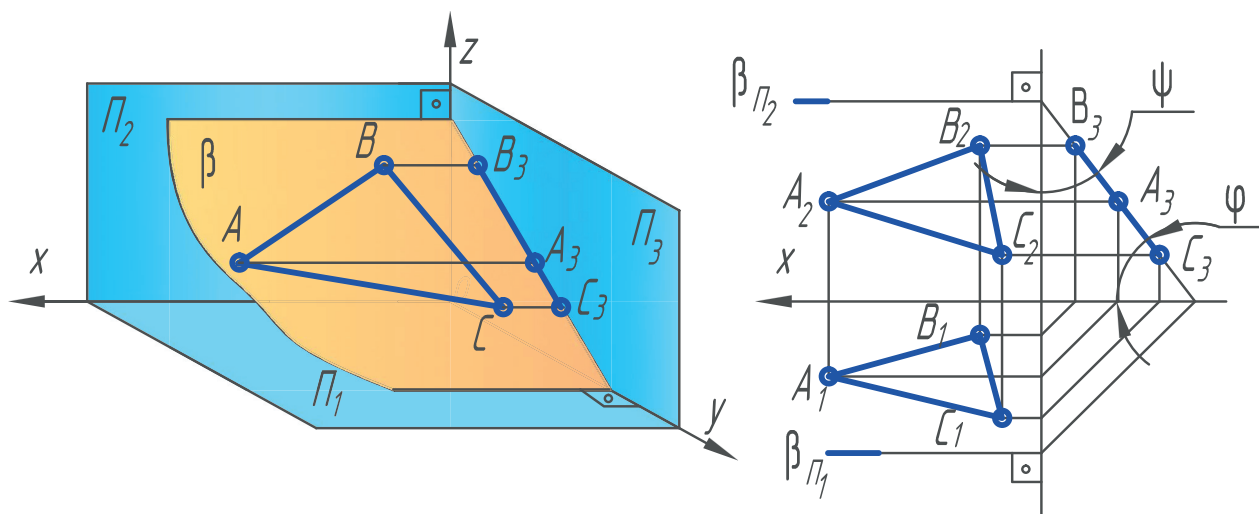


Рис. 26. Профильно-проецирующая плоскость

К плоскостям частного положения относятся также и плоскости уровня. Плоскости уровня параллельны одной из плоскостей проекций и перпендикулярны двум другим. Они подразделяются на горизонтальные (рис. 27), фронтальные (рис. 28) и профильные (рис. 29) плоскости уровня.

Необходимо отметить, что любая фигура, лежащая в плоскости уровня, проецируется на одноименную плоскость проекций в натуральную величину, без искажения, а на две другие плоскости — в виде прямых линий, которые совпадают со своими одноименными следами.

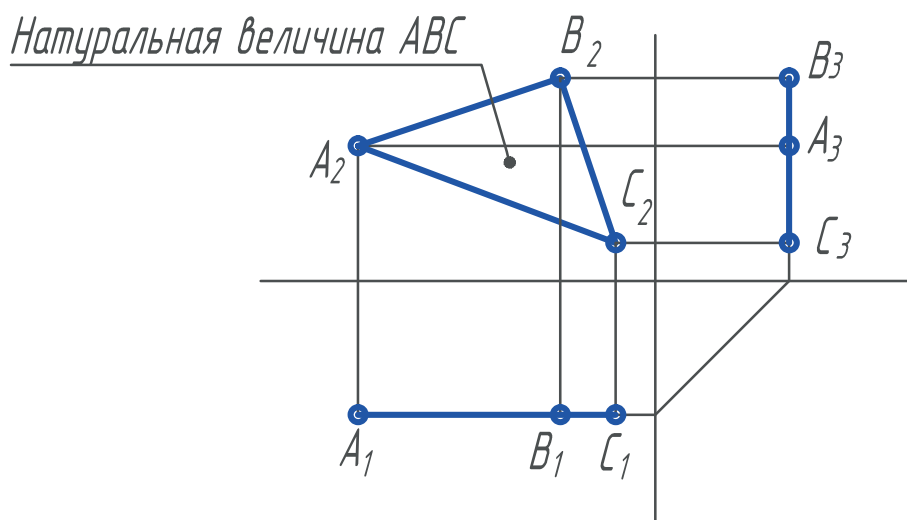


Рис. 27. Фронтальная плоскость уровня

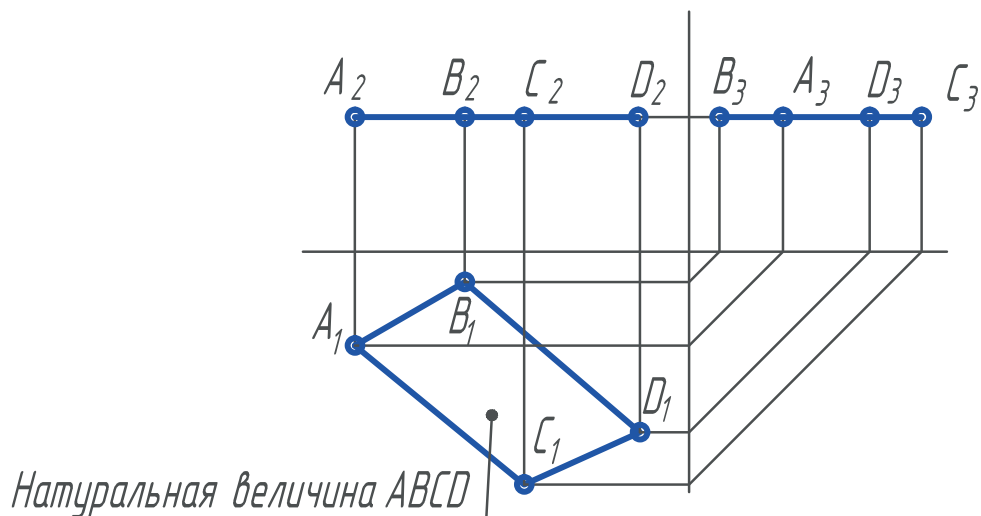


Рис. 28. Горизонтальная плоскость уровня

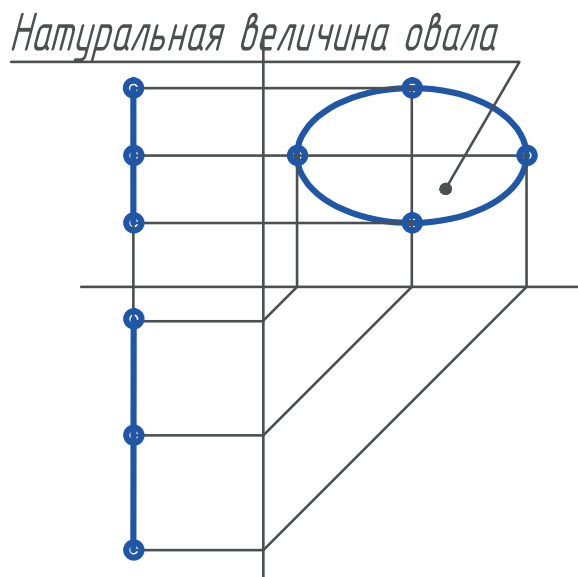


Рис. 29. Профильная плоскость уровня

Плоскости уровня также называются дважды проецирующими, так как на две плоскости проекций они проецируются в виде двух прямых линий.

Прямая принадлежит плоскости, если проходит через две точки данной плоскости либо через точку плоскости и параллельно какой-нибудь прямой этой плоскости. Точка принадлежит плоскости, если лежит на прямой линии заданной плоскости.

### Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите и изобразите графические способы задания плоскости на комплексном чертеже.
2. Что понимают под следом плоскости?

3. Дайте графические характеристики плоскостям: горизонтально-проецирующей, фронтально-проецирующей, профильно-проецирующей.
4. Какую плоскость называют плоскостью уровня?
5. Какие линии являются главными линиями плоскости?
6. Каким образом можно перейти от одного способа задания плоскости к другому, например, следами?
7. Сформулируйте правило конкурирующих точек.

## 4. ПОВЕРХНОСТЬ

---

**К**лассификация поверхностей разнообразна и бесконечна. Простые геометрические тела (куб, призма, пирамида, конус, цилиндр, шар) и сложные поверхности (тор, параболоид вращения, винтовые поверхности, гиперboloид вращения, поверхности параллельного переноса и т.д.) создают необычайно красивый мир окружающих нас предметов.

Форму предметов создает (проектирует) и совершенствует человек. В практической работе на различных стадиях проектирования (от наброска, эскиза, технического рисунка до проектно-конструкторской документации) студент, а в дальнейшем дизайнер обращается к изображению различных поверхностей. Знание теоретических основ построения поверхностей позволяет специалисту грамотно создавать проектно-конструкторскую документацию, на основании которой выполняется изделие в материале. Кроме того, без знания теоретических основ построения линии пересечения поверхностей невозможно точно и грамотно исполнить проект в натуральную величину.

### 4.1. Образование и задание поверхности

---

Поверхность представляет собой множество последовательных положений линии, движение и форма которой подчинены некоторому закону. Эту линию принято называть образующей (рис. 30).

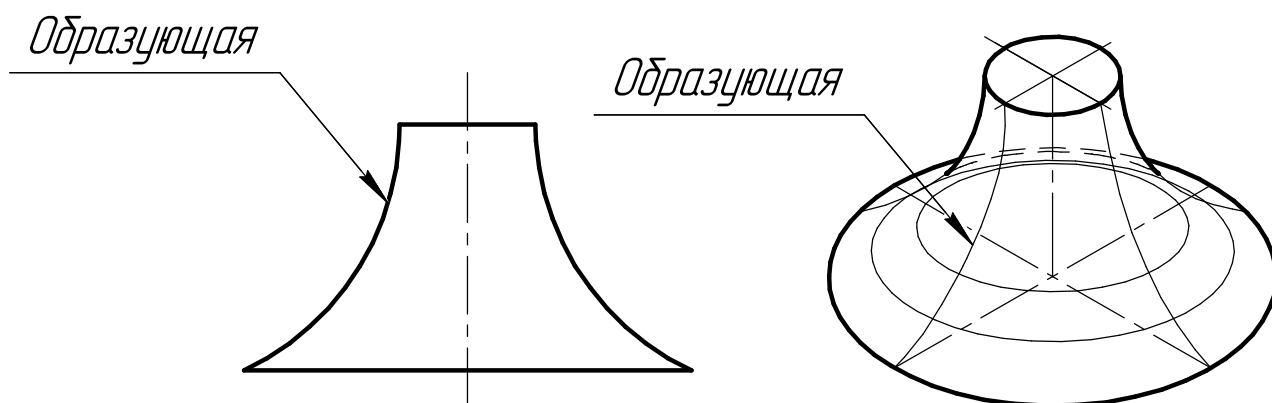


Рис. 30. Образование поверхности

По виду образующей различают поверхности линейчатые, образующей которых является прямая линия, и нелінейчатые (кривая образующая).

Коническая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей  $l$  по криволинейной направляющей  $m$ . При этом одна точка образующей ( $S$ ) всегда неподвижна и является вершиной конической поверхности (рис. 31, *a*).

Цилиндрическая поверхность образуется прямой  $l$ , пересекающей кривую направляющую  $m$  и параллельной заданному направлению  $s$  (рис. 31, *б*). Цилиндрическую поверхность можно рассматривать как частный случай конической поверхности с бесконечно удаленной вершиной  $S$ .

Точки на конических и цилиндрических поверхностях строят с помощью образующих, проходящих через них. Линии на поверхностях (например,  $n$  — см. рис. 31, *a*, *б*) строятся с помощью отдельных точек, принадлежащих этим линиям и поверхности.

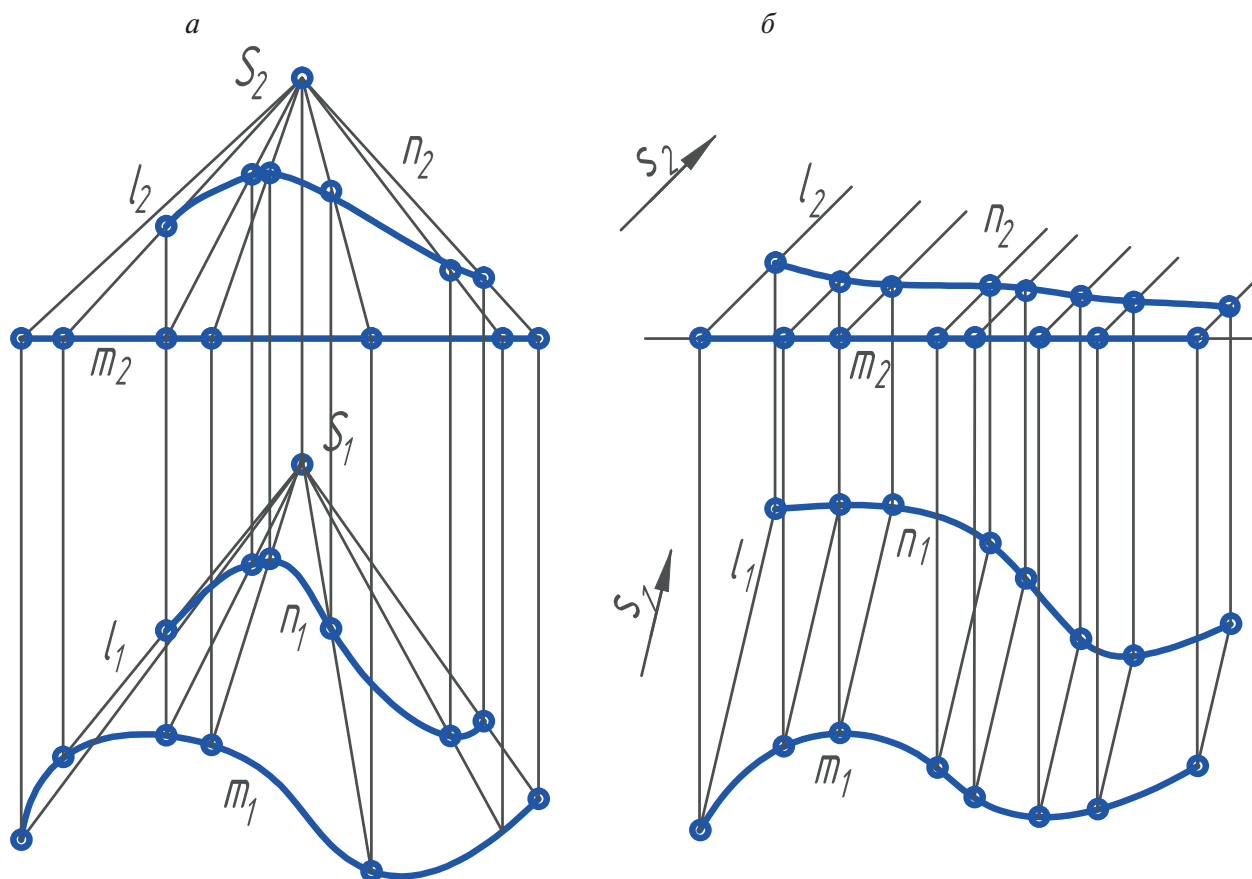


Рис. 31. Линейчатые поверхности:

*a* — коническая; *б* — цилиндрическая

Нелинейчатые циклические поверхности (рис. 32) формируются движением окружности постоянного или переменного радиуса.

Все окружающие нас предметы наиболее часто состоят из простых геометрических тел и поверхностей. При этом основными из них являются гранные поверхности и поверхности вращения, которые в совокупности образуют какую-либо форму предмета. Для чтения и построения чертежей предмета важно знать, как образуются и изображаются поверхности на чертеже, эюре. Для графических изображений поверхности на эюре строят очерк (очертание) поверхности.

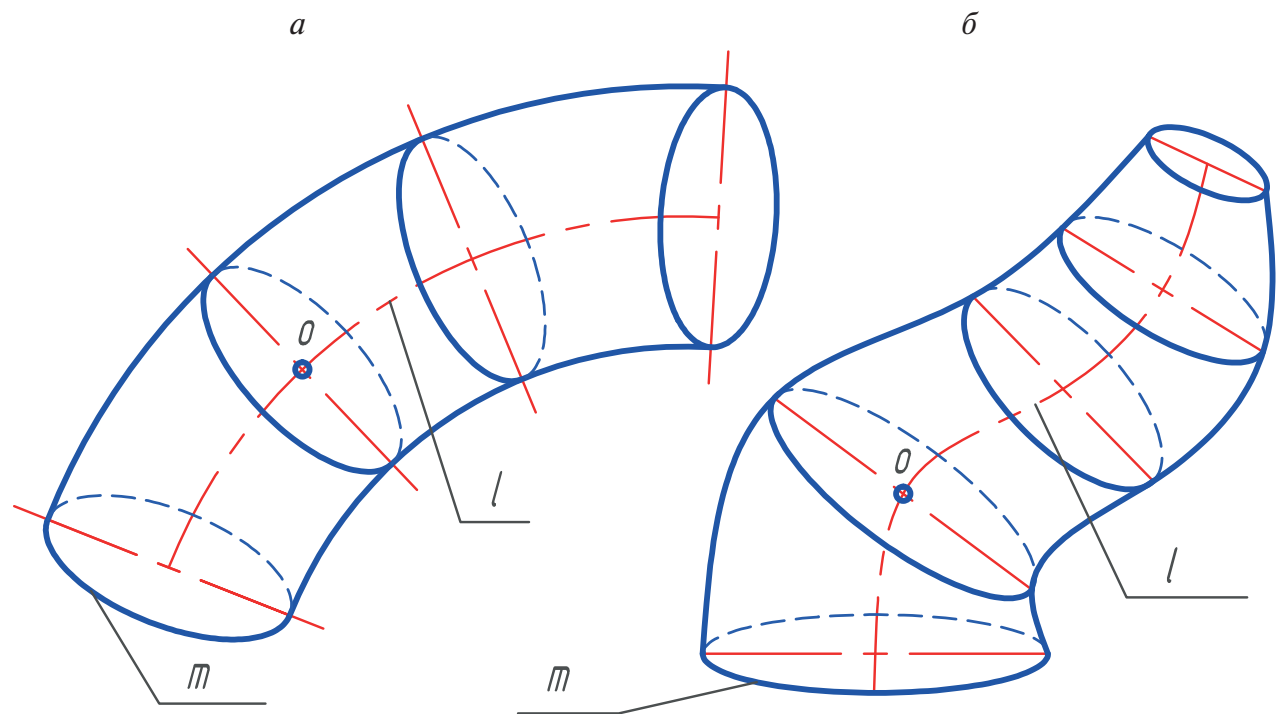


Рис. 32. Циклические поверхности:  
*a* — постоянного радиуса; *б* — переменного радиуса

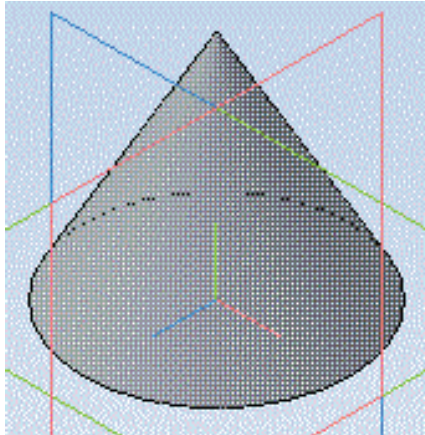
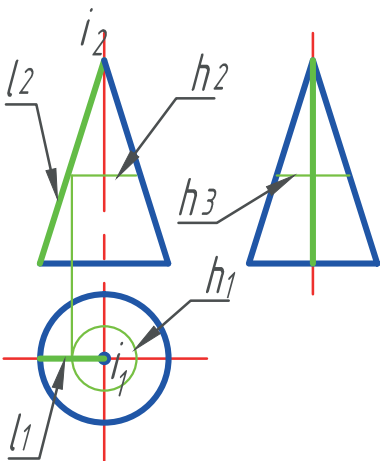
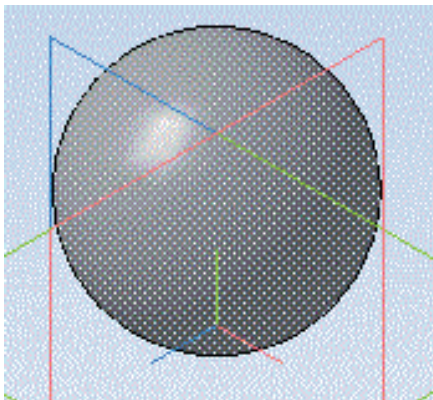
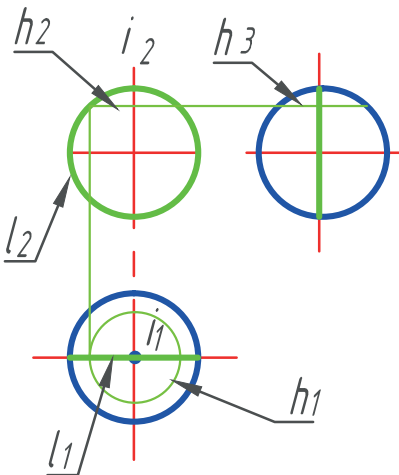
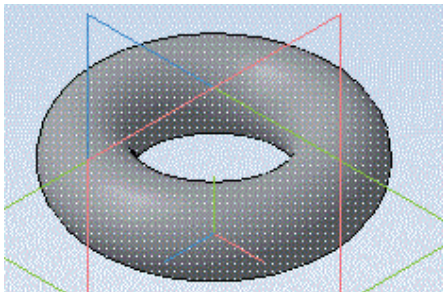
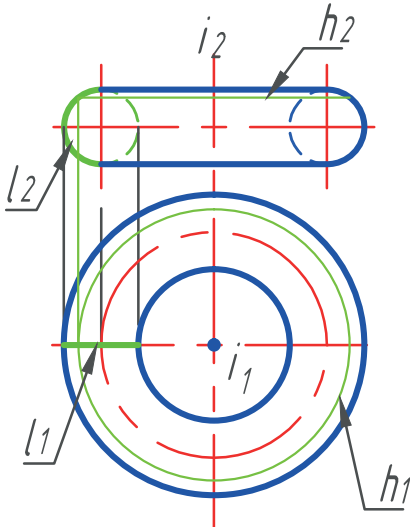
Очерк получают при ортогональном проецировании на плоскость проекций проецирующей поверхности, которая огибает заданную (табл. 1). Очерки ограничивают область проекций поверхности и являются линиями видимости.

Таблица 1

Поверхности вращения

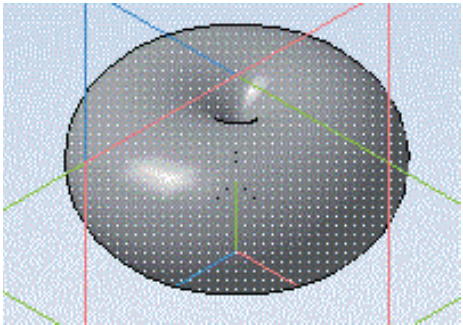
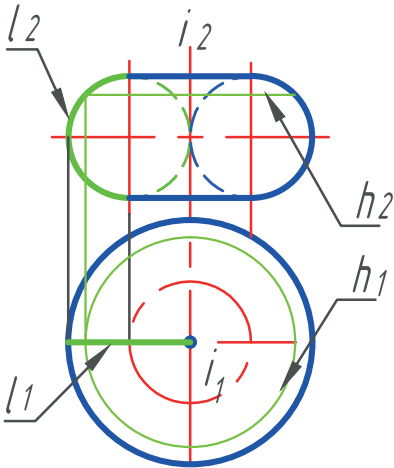
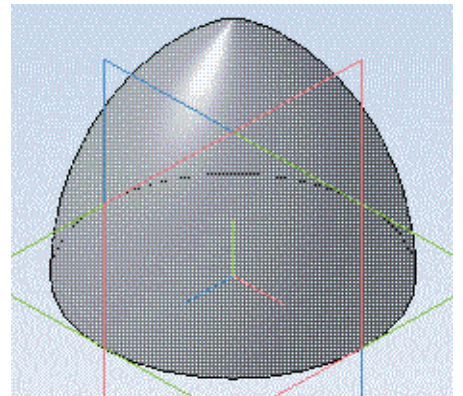
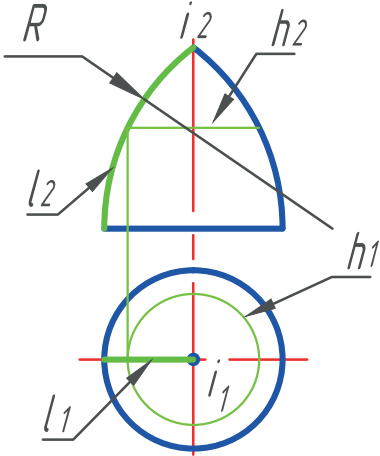
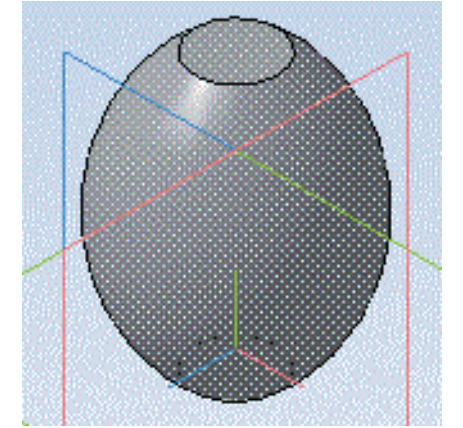
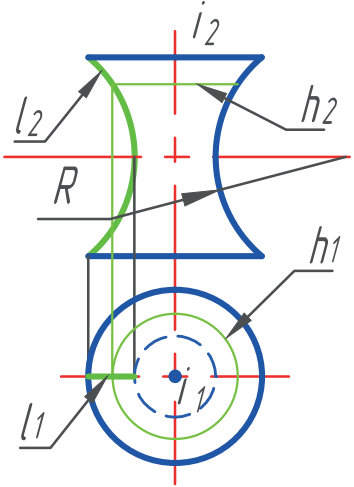
Наименование поверхности	Наглядное изображение	Ортогональные проекции
Прямой круговой цилиндр		

Продолжение табл. 1

Наименование поверхности	Наглядное изображение	Ортогональные проекции
Прямой круговой конус		
Сфера		
Открытый тор-кольцо		

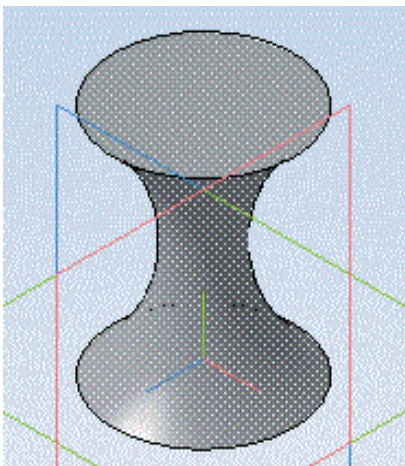
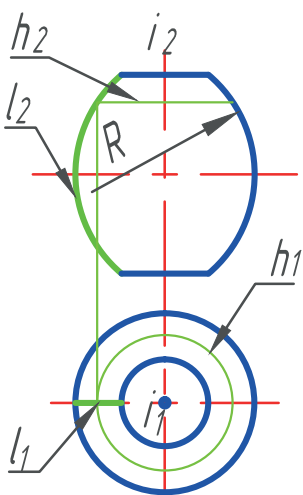


Продолжение табл. 1

Наименование поверхности	Наглядное изображение	Ортогональные проекции
Закрытый тор		
Самопересекающийся тор		
Самопересекающийся тор-бочка		



Окончание табл. 1

Наименование поверхности	Наглядное изображение	Ортогональные проекции
Вогнутый тор-глобоид		

## 4.2. Поверхности вращения

Поверхности вращения образуются вращением линии  $L$  (образующей) вокруг неподвижной прямой  $I$  — оси вращения.

Каждая точка образующей ( $L$ ) при вращении описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения ( $I$ ). Такие окружности поверхности вращения называются параллелями. Если ось вращения перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то параллели являются горизонталями поверхности ( $h$ ) (табл. 1).

Торовая поверхность образуется при вращении окружности или ее дуги вокруг неподвижной оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр. Строить точки на криволинейных поверхностях вращения удобнее всего с помощью параллелей.

## 4.3. Многогранники

Форму многогранников имеют многие предметы, детали машин и механизмов. При конструировании и проектировании кривые поверхности иногда аппроксимируют (заменяют) близкими по форме гранными поверхностями.

Многогранники — замкнутые пространственные фигуры, ограниченные плоскими многоугольниками. Эти многоугольники называются гранями многогранника, а линии их пересечения — ребрами, точки пересечения ребер — вершинами многогранника (рис. 33). В практике наиболее часто встречаются призмы и пирамиды.

Призма — многогранник, две грани которого (основания) — конгруэнтные многоугольники с параллельными сторонами, а остальные грани (боковые поверхности) — параллелограммы.

Призма называется прямой, если ее ребра перпендикулярны основаниям.

Призма называется правильной, если она прямая и в основании правильный многоугольник.

Пирамида — многогранник, у которого одна грань (основание) — многоугольник, а остальные (боковые грани) — треугольники — имеют общую вершину. Если пирамида усечена плоскостью параллельной основанию, то у нее два подобных основания.

Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а высота проходит через центр этого многоугольника, боковые грани — равнобедренные треугольники.

Название многогранника зависит от фигуры основания, например: шестигранная правильная прямая призма, четырехгранная правильная пирамида, трехгранная прямая призма и т. д.

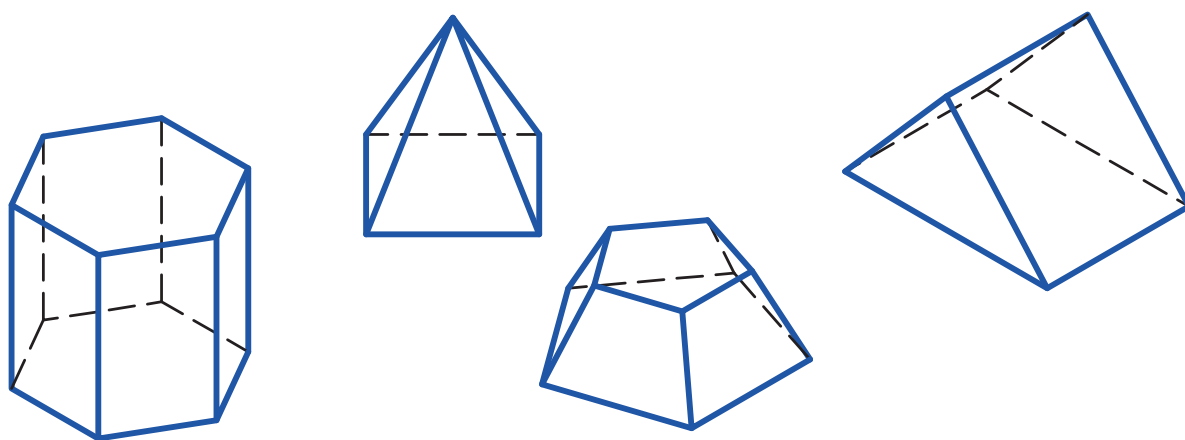


Рис. 33. Многогранники

Правильные многогранники (тела Платона) — поверхности, все грани которых есть одинаковые правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах равны между собой (рис. 34). Правильные многогранники могут быть вписаны в сферу или описаны около нее.

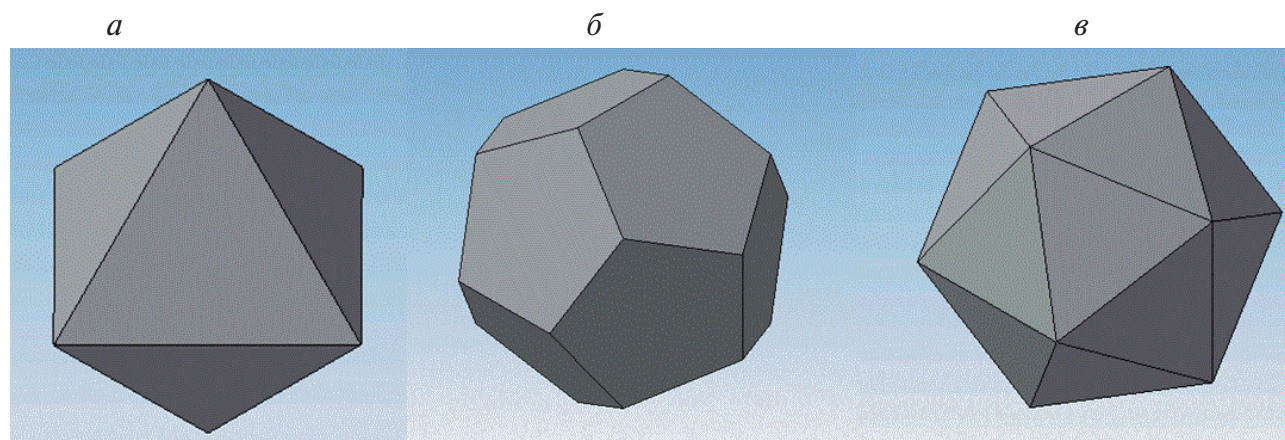


Рис. 34. Правильные многогранники:

*a* — октаэдр; *б* — додекаэдр; *в* — икосаэдр

#### 4.4. Принадлежность точки, прямой линии поверхности

Принадлежность точки поверхности определяется принадлежностью ее какой-либо линии, расположенной на поверхности, например, образующей или параллели поверхности.

Характерными точками на поверхности являются точки, принадлежащие очерковым линиям поверхности. Проекции этих точек находят, как правило, без дополнительных построений.

На рис. 35 показано построение характерных точек:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  по линиям проекционной связи, так как  $A$  и  $C$  принадлежат очерковым образующим,  $B$  — линии основания. Дополнительные точки на рисунке: точка  $E$  принадлежит образующей  $SB$ ; точка  $D$  строится по параллели конуса, которой она принадлежит.

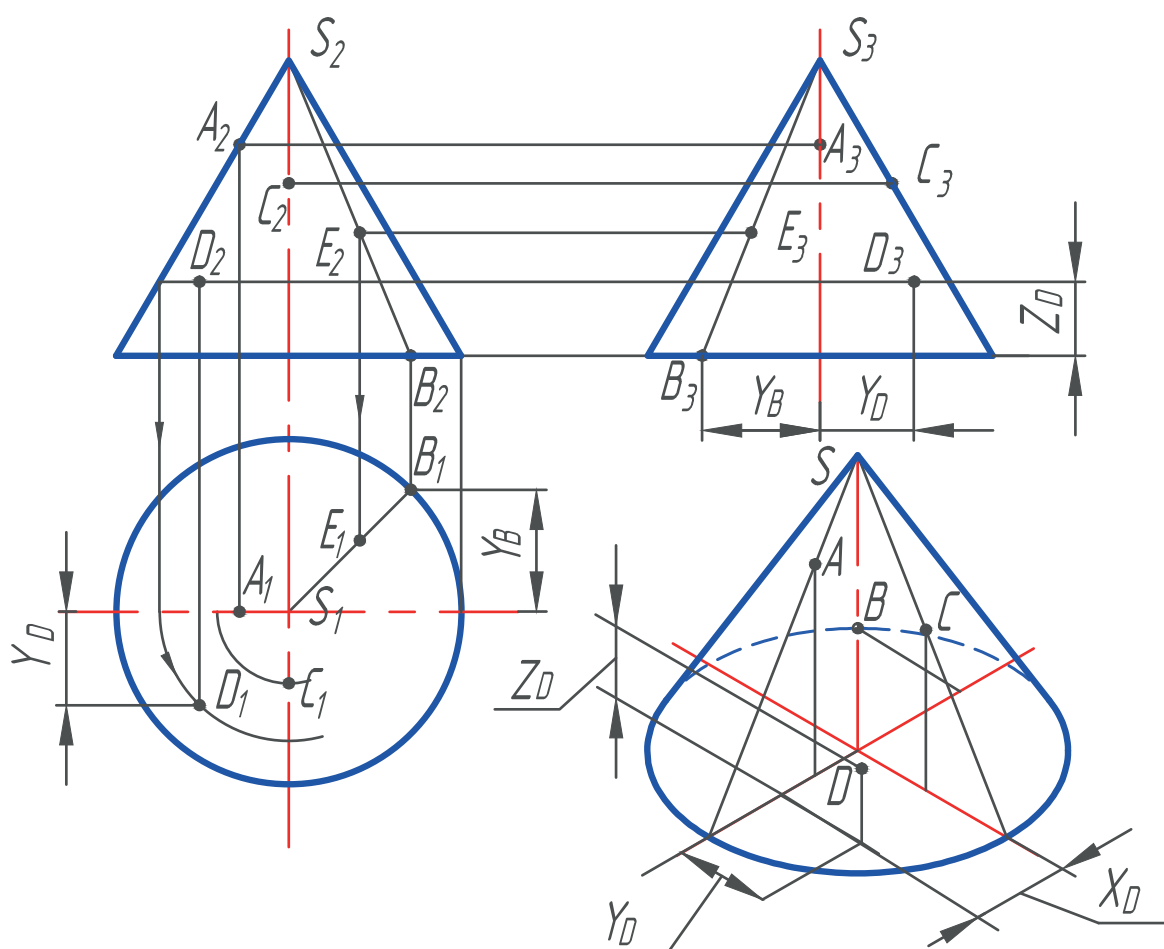


Рис. 35. Координатный способ построения точек на поверхности конуса

Изометрические проекции поверхностей и точек строятся по ортогональным проекциям благодаря свойству взаимной обратимости этих проекций. Размеры отрезков, параллельных осям координат на чертеже, однозначно соответствуют размерам отрезков, параллельных аксонометрическим осям. В прямоугольной изометрической проекции коэффициент искажения по всем трем осям  $k = 0,82$ . В учебных целях мы принимаем  $k = 1$ .

Изометрические проекции точек на поверхности строятся координатным способом. Например, координаты точки  $D(x_d, y_d, z_d)$ , принадлежащей поверхности прямого кругового конуса (см. рис. 35), измеряем в ортогональных проекциях параллельно координатным осям  $x, y, z$ . В прямоугольной изометрической проекции откладываем эти координаты параллельно аксонометрическим осям  $x, y, z$ . Получаем аксонометрическую проекцию точки  $D$  на поверхности конуса.

Аналогично выполняются построения проекций точек, принадлежащих поверхности сферы (рис. 36). Характерными точками являются  $A, B, C$ , принадлежащие очерковым линиям сферы, а именно:  $A$  принадлежит главному меридиану;  $B$  — экватору сферы;  $C$  — меридиану на профильной плоскости. Как и в предыдущем случае, точка  $D$  — промежуточная, ее проекции строятся с помощью параллели, на которой она расположена.

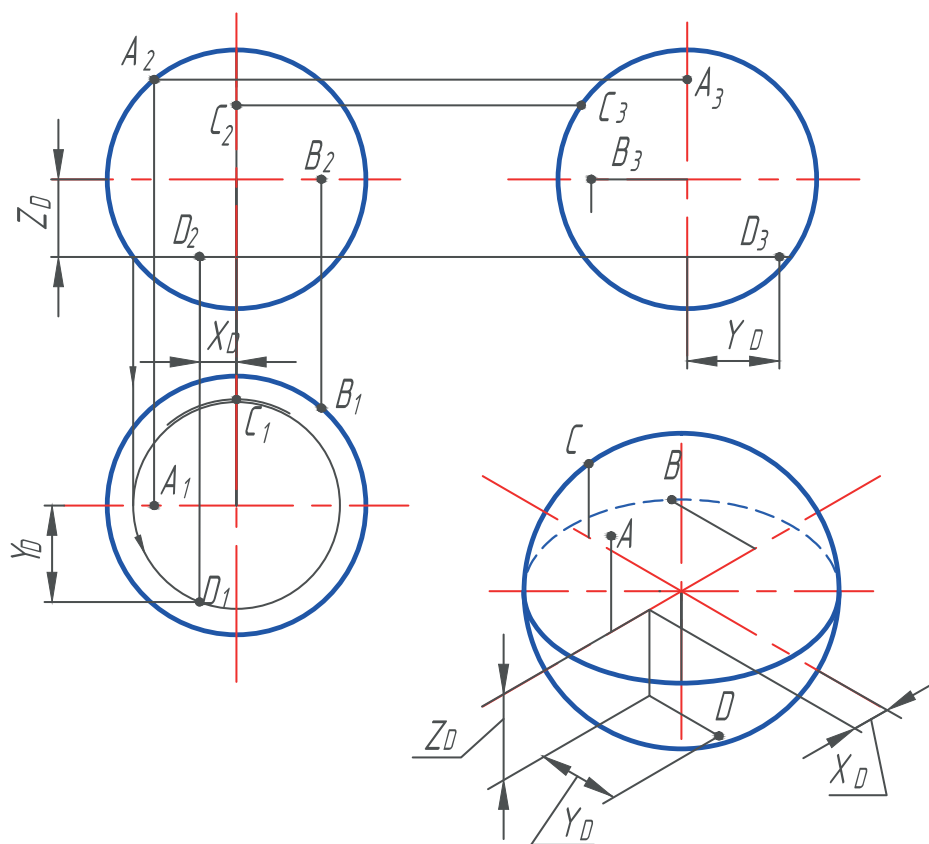


Рис. 36. Построение точек на поверхности сферы

На рис. 37 изображены проекции прямой трехгранной призмы. Ребра призмы — профильно-проецирующие прямые, а боковая поверхность призмы является профильно-проецирующей поверхностью, поэтому профильные проекции точек  $A, B, C, D$  совпадают с очерком призмы на плоскости  $\Pi_3$ .

На рис. 38 показаны проекции прямого кругового цилиндра. Ось цилиндра — горизонтально-проецирующая прямая, поэтому цилиндрическая поверхность является проецирующей относительно этой же плоскости проекций и вырождается в окружность. На этой окружности расположены соответствующие проекции всех точек цилиндрической поверхности.

Изометрические проекции поверхностей и точек строятся также координатным способом.

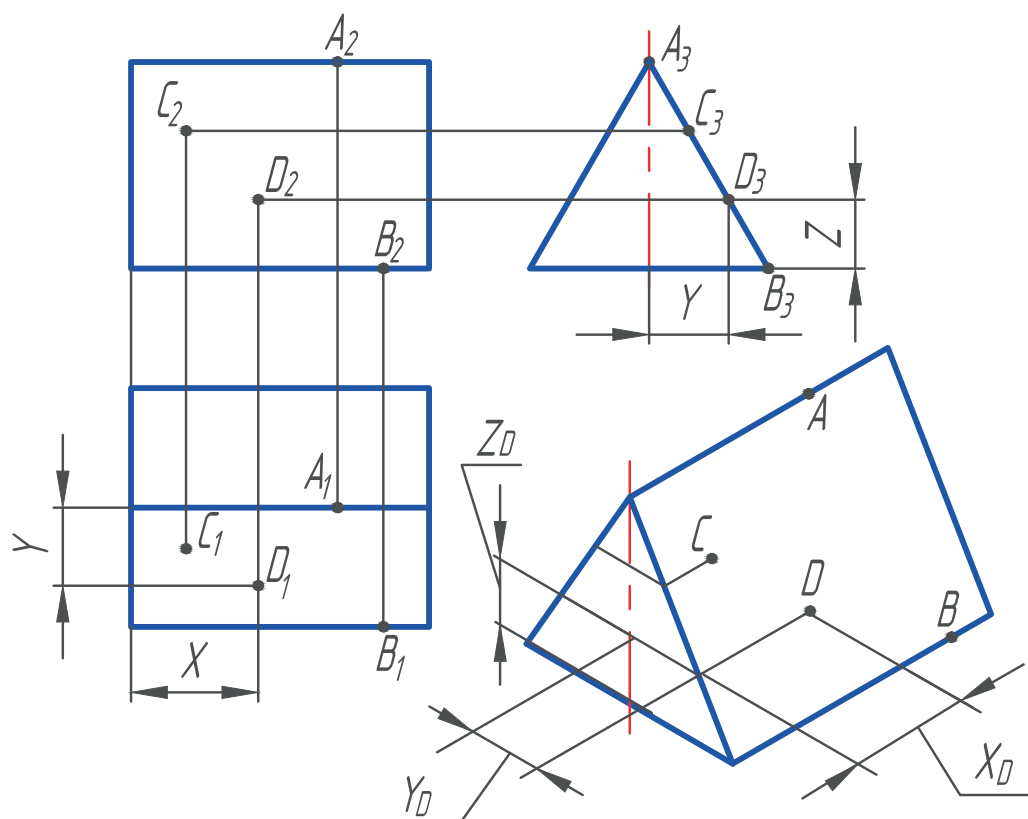


Рис. 37. Построение точек на проецирующей поверхности прямой призмы

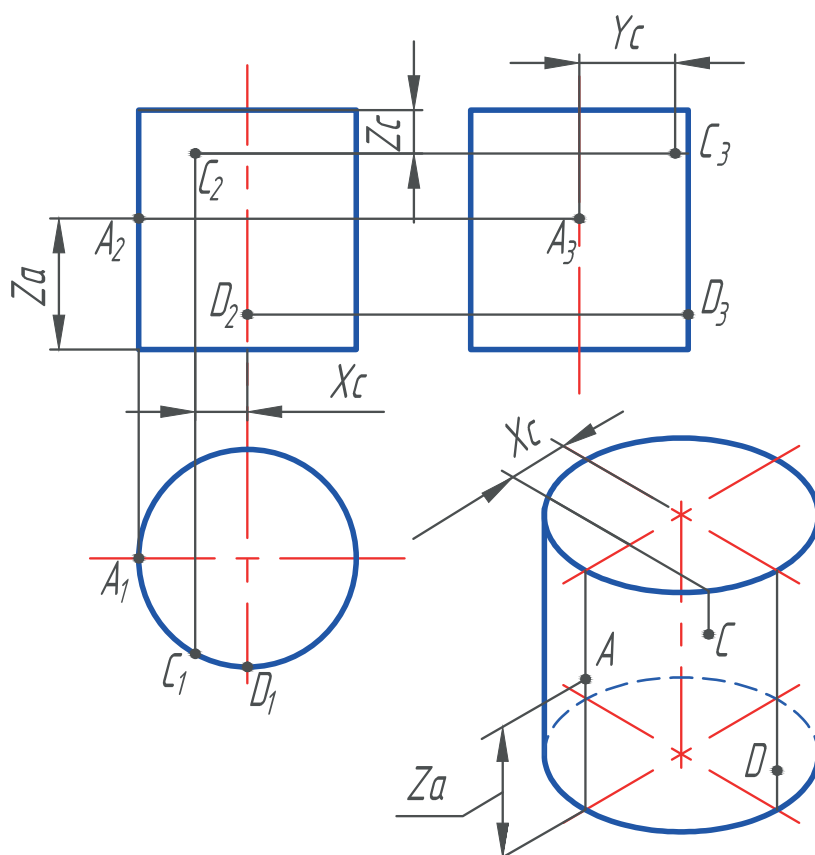


Рис. 38. Построение точек на проецирующей поверхности прямого кругового цилиндра

### Вопросы для самоконтроля

---

1. Какие линии называются образующими, направляющими поверхности?
2. Сформулируйте определение очерка поверхности.
3. Приведите примеры линейчатых и нелинейчатых поверхностей.
4. Какие поверхности называются многогранниками? Назовите элементы гранных поверхностей.
5. Приведите примеры поверхностей вращения.
6. Какие точки поверхности называются характерными?
7. Какие поверхности называются проецирующими? Приведите примеры.
8. Сформулируйте координатный способ построения аксонометрических проекций точки, принадлежащей поверхности.

## 5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

---

### 5.1. Сечение поверхности плоскостью

---

**П**ри пересечении поверхности плоскостью получается плоская фигура, ограниченная линией, все точки которой принадлежат секущей плоскости и заданной поверхности.

При пересечении многогранника плоскостью в сечении получаются плоские многоугольники. При пересечении поверхности вращения в общем случае получается плоская кривая линия.

Линию пересечения строят по точкам, начиная с характерных точек, принадлежащих очеркам поверхности, по точкам на ребрах многогранника, вершинам кривых линий, точкам, определяющим границу видимости. Остальные точки линии пересечения находят по принадлежности точки какой-либо линии этой поверхности, например, параллели или образующих линий поверхности.

Если поверхность пересекается плоскостью частного положения (проецирующей или плоскостью уровня), то на соответствующей плоскости проекций проекция линии пересечения представляет собой прямую линию, совпадающую со следом секущей плоскости.

Примеры построения сечений геометрических тел плоскостями в изометрии по ортогональным проекциям представлены на рис. 39–43.

Призма является горизонтально-проецирующей поверхностью (рис. 39). В сечении призмы фронтально-проецирующей плоскостью  $P$  получается шестиугольник. Горизонтальная проекция сечения совпадает с очерком призмы.

В сечении пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью  $P$  получается пятиугольник, вершины которого — точки пересечения секущей плоскости и ребер пирамиды, а стороны — линии пересечения с гранями — прямые линии (рис. 40).



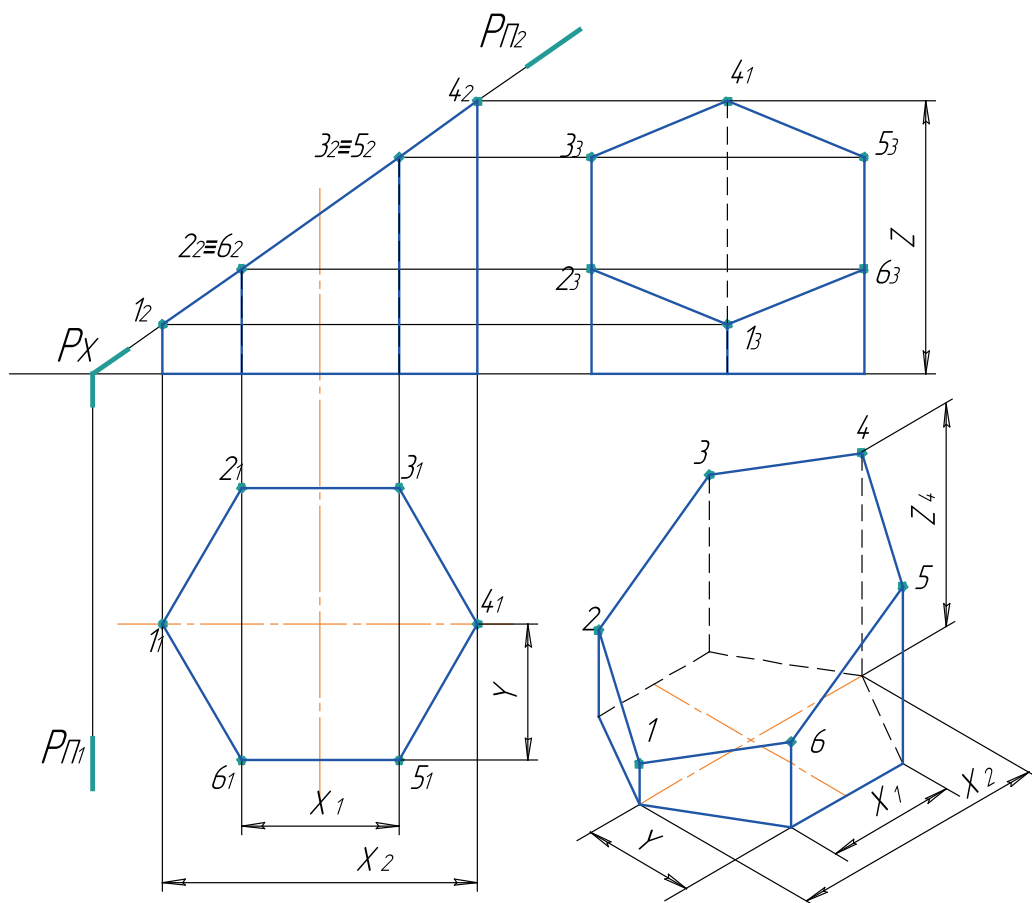


Рис. 39. Сечение прямой правильной шестиугольной призмы

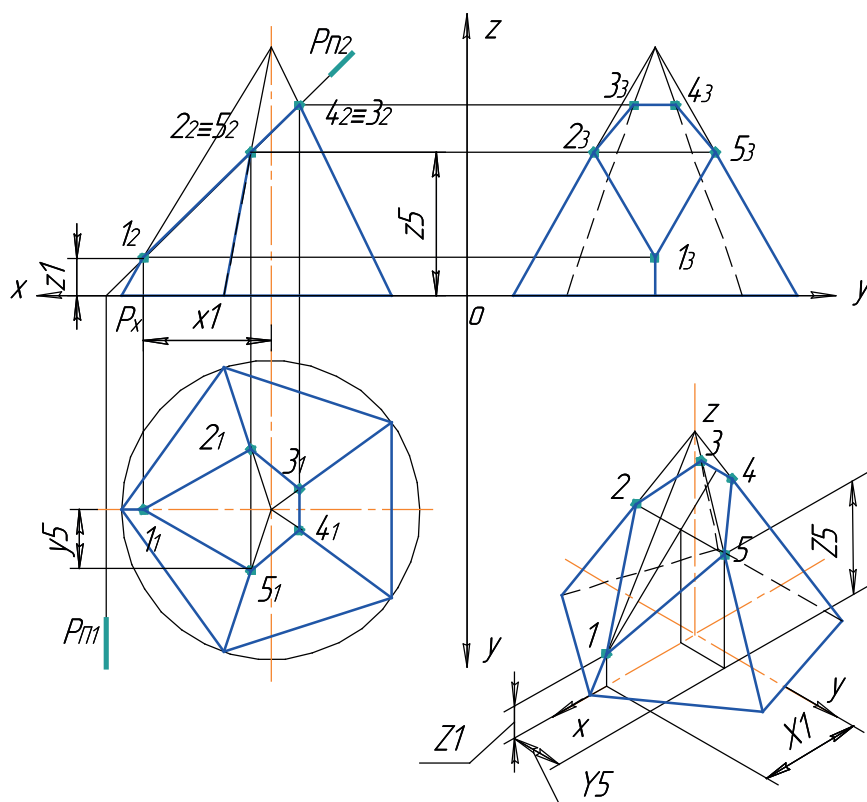


Рис. 40. Сечение правильной пятиугольной пирамиды



Поверхность цилиндра профильно-проецирующая. При пересечении фронтально-проецирующей плоскостью  $P$  получается эллипс. Профильная проекция эллипса — окружность (рис. 41).

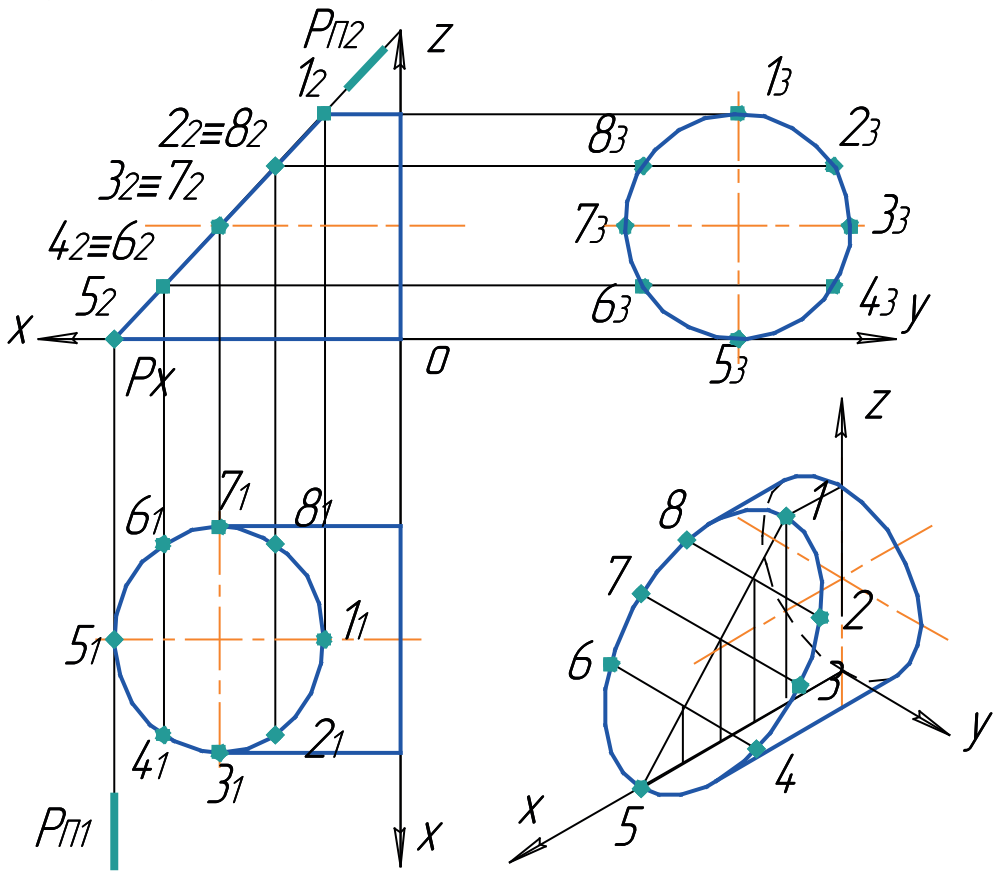


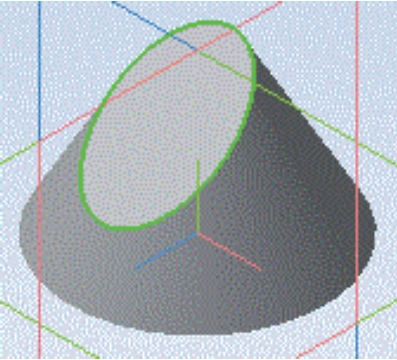
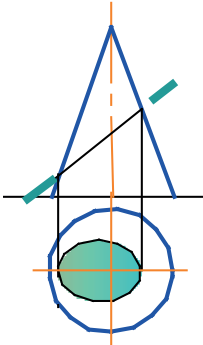
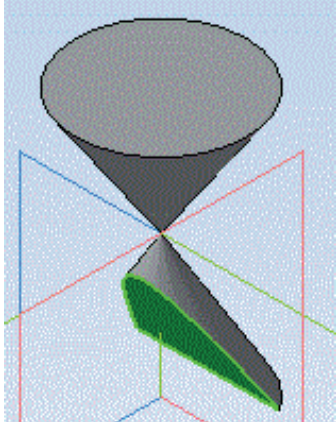
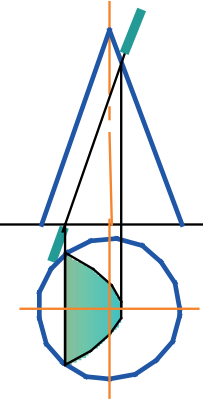
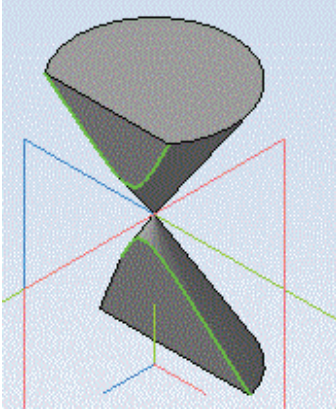
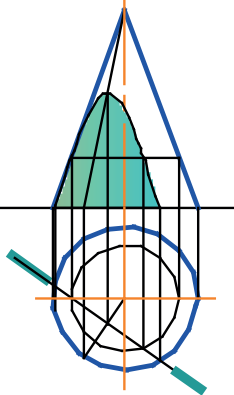
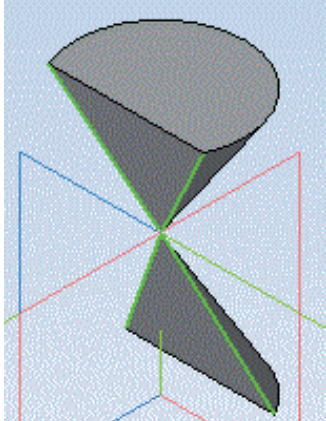
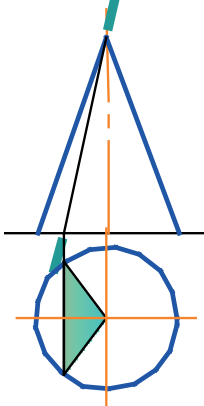
Рис. 41. Сечение прямого кругового цилиндра

Коническая поверхность является уникальной поверхностью, так как в результате пересечения конуса плоскостями на поверхности получаются замечательные плоские кривые 2-го порядка — окружность, эллипс, парабола, гипербола (табл. 2).

Таблица 2

Сечение конуса плоскостями

Геометрическая фигура и положение секущей плоскости	Наглядное изображение плоскости сечения	Ортогональное изображение плоскости и фигуры сечения
Окружность — плоскость перпендикулярна оси вращения		

Геометрическая фигура и положение секущей плоскости	Наглядное изображение плоскости сечения	Ортогональное изображение плоскости и фигуры сечения
Эллипс — плоскость под углом к оси вращения		
Парабола — плоскость параллельна одной из образующих		
Гипербола — плоскость параллельна двум образующим		
Треугольник — плоскость проходит через вершину конуса и пересекает основания		

Как видно из табл. 2, гипербола получается в сечении конуса плоскостью, параллельной двум образующим. В частном случае, когда секущая плоскость проходит через вершину конуса, сечение распадается на две пересекающиеся прямые (стороны треугольника).

Построение эллипса в сечении фронтально-проецирующей плоскостью представлено на рис. 42.

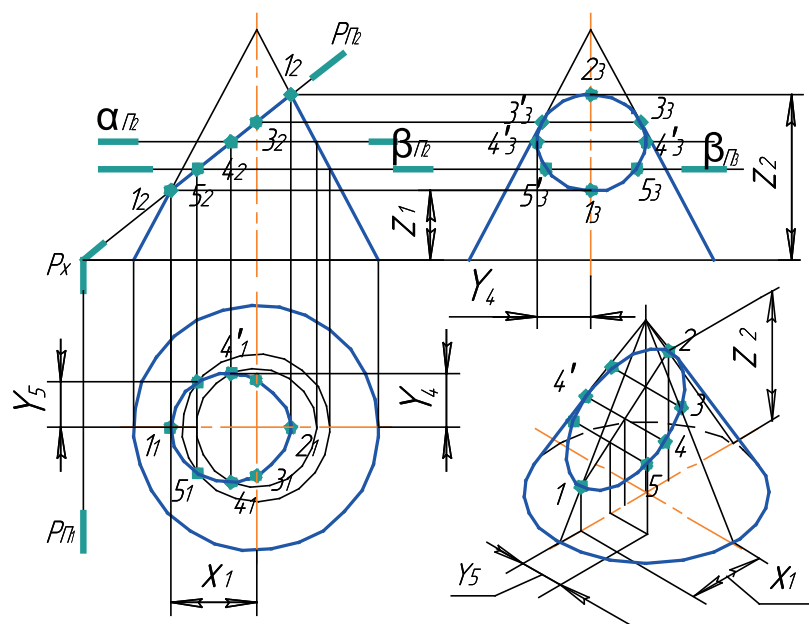


Рис. 42. Построение эллипса

Построение гиперболы в сечении конуса горизонтально-проецирующей плоскостью показано на рис. 43.

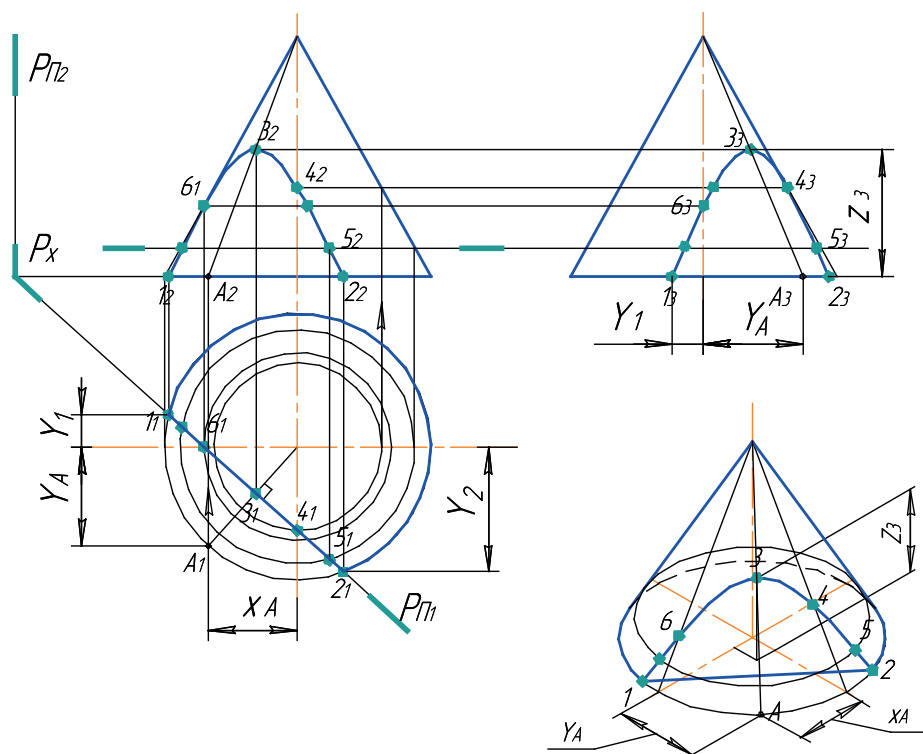


Рис. 43. Построение гиперболы

## 5.2. Геометрическое тело с вырезом

Построение проекций геометрических тел с вырезами отличается тем, что вырез выполняется несколькими секущими плоскостями и при этом получается несколько плоских сечений либо вырез может быть выполнен цилиндрической поверхностью и при этом образуется пространственная кривая линия на поверхности геометрического тела. Плоскости выреза также образуют линию пересечения. Особое внимание следует обратить на определение видимости проекций тела с вырезом.

На рис. 44 выполнен пример построения ортогональных и аксонометрической проекций сферы с вырезом.

*Пример.* По заданной фронтальной проекции сферы с вырезом построить горизонтальную и профильную проекцию. Вырез выполнен двумя плоскостями частного положения:  $\alpha$  — фронтально-проецирующей и  $\beta$  — горизонтальной плоскостью уровня. Сечение сферы плоскостью представляет окружность. Фронтальные проекции окружности — прямые линии. При построении проекций сечения сферы следует обратить внимание, что если секущая плоскость параллельна плоскости проекций, то окружность проецируется в натуральную величину (часть окружности на горизонтальной плоскости проекций), а если секущая плоскость проецирующая, то эта окружность проецируется на плоскости проекций в виде эллипса (части эллипса).

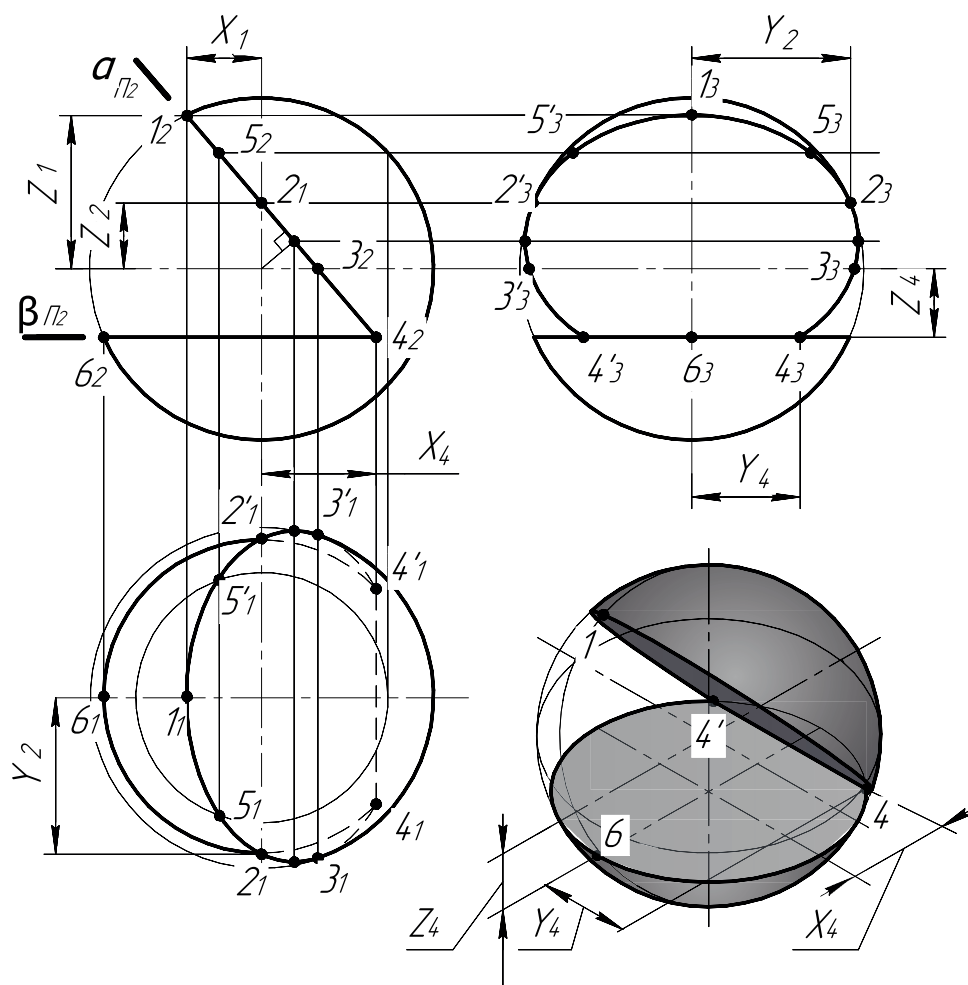


Рис. 44. Сфера с вырезом

Характерные точки линий выреза принадлежат: главному меридиану — точки 1 и 6; очерку на профильной плоскости проекций — 2; экватору сферы — 3 и 3'; точки 4 и 4' — на линии пересечения плоскостей выреза. Дополнительные точки, например точку 5, выбирают произвольно. Профильную проекцию строят по горизонтальной и фронтальной проекциям в проекционной связи. Точки эллипса соединяют плавной кривой линией, окружность — циркулярная кривая. Обводят очерки сферы и линии пересечения с учетом видимости на горизонтальной и профильной плоскостях проекций.

Изометрическую проекцию сферы с вырезом строят координатным способом.

### 5.3. Пересечение поверхности прямой линией

При пересечении прямой с поверхностью решается позиционная задача, которая заключается в определении общих точек, принадлежащих прямой и заданной поверхности. Для определения точек пересечения применяется способ посредников.

Алгоритм решения задач следующий.

1. Выбрать и провести через прямую вспомогательную секущую плоскость частного положения так, чтобы в сечении получались простые сечения, ограниченные окружностями или прямыми линиями.

Если прямая лежит в плоскости частного положения, то ее проекция совпадает с соответствующим следом плоскости.

2. Построить линию пересечения секущей плоскости и заданной поверхности.

3. Найти точки пересечения построенной линии пересечения и заданной прямой, лежащих в одной вспомогательной плоскости. Очевидно, что эти точки являются искомыми точками пересечения.

4. Определить видимость участков прямой по конкурирующим точкам. В некоторых задачах видимость можно определить визуально по видимости самой поверхности.

В задаче (рис. 45) вспомогательная секущая плоскость  $\alpha$  — горизонтальная плоскость уровня, в сечении получается окружность.

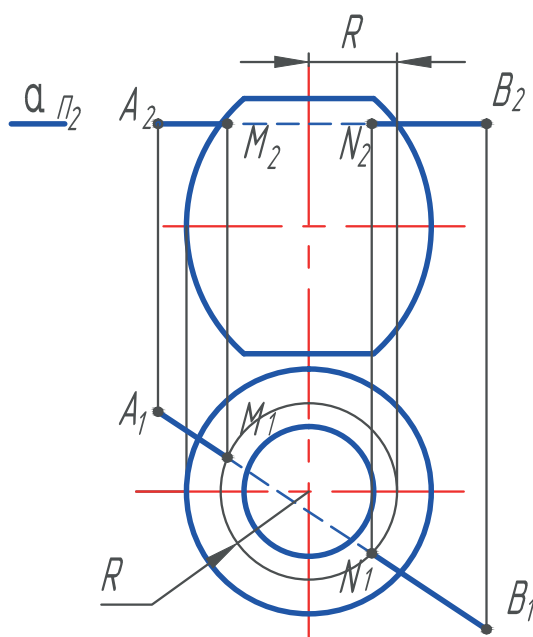


Рис. 45. Пересечение прямой  $AB$  с тором

На рис. 46 вспомогательной секущей плоскостью является горизонтально-проецирующая плоскость  $\beta$ , проходящая через вершину конуса  $S$  и, следовательно, пересекающая коническую поверхность по прямым линиям — образующим конуса  $SA$  и  $SB$ .

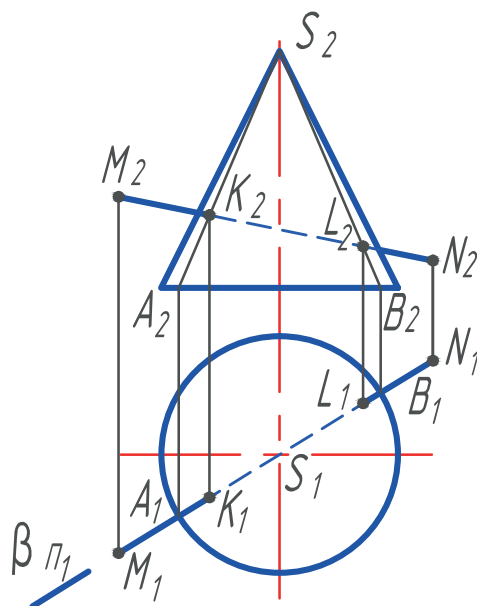


Рис. 46. Пересечение прямой  $MN$  с конусом

В качестве секущей плоскости наклонной пирамиды (рис. 47) выбрана фронтально-проецирующая плоскость  $\beta$ , в сечении пирамиды получается треугольник 1, 2, 3. Через прямую можно провести и горизонтально-проецирующую плоскость, но в этом случае получается четырехугольник.

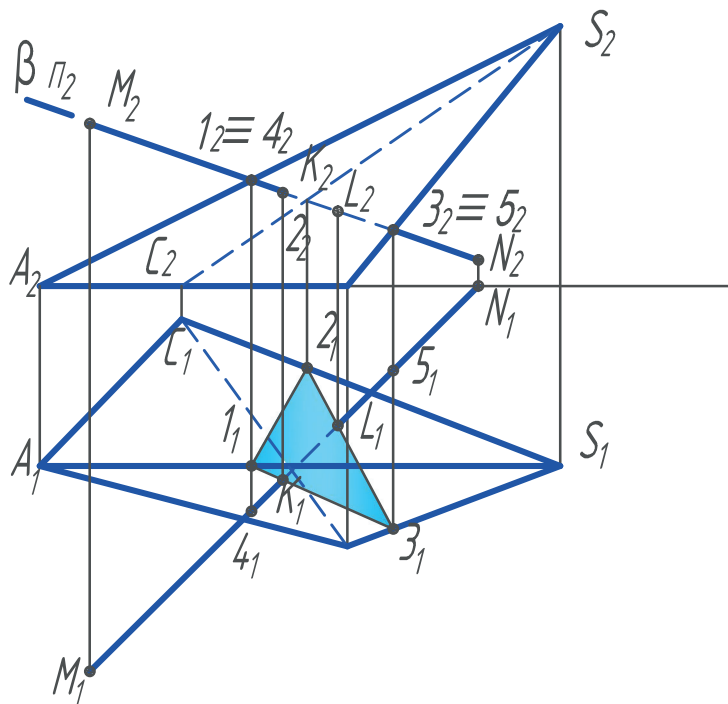
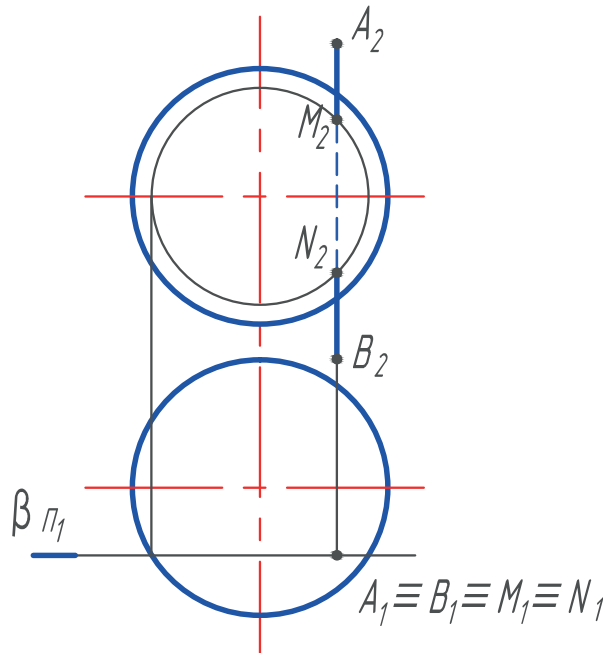
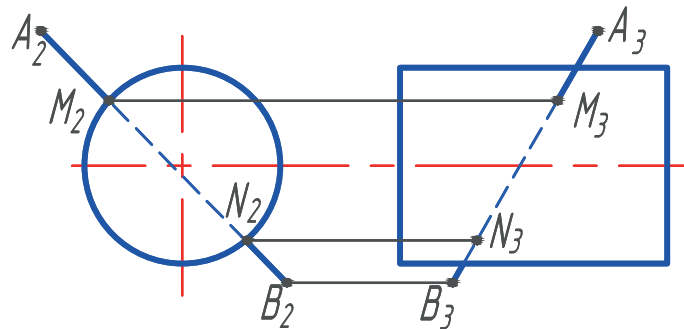


Рис. 47. Пересечение прямой  $MN$  с наклонной пирамидой

Рис. 48. Пересечение прямой  $AB$  со сферой

Секущая фронтальная плоскость  $\beta$  пересекает сферу по окружности. Прямая  $AB$  горизонтально-проецирующая (рис. 48), поэтому горизонтальные проекции точек совпадают с проекцией прямой на горизонтальной плоскости проекций.

Если поверхность проецирующая, например, прямая призма или прямой круговой цилиндр, то вспомогательную плоскость не проводят, а точки пересечения прямой с поверхностью определяют на той плоскости проекций, относительно которой поверхность является проецирующей (рис. 49).

Рис. 49. Пересечение прямой  $AB$  с цилиндром

### Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Построить точки пересечения отрезка  $AB$  прямой линии с поверхностью открытого тора (рис. 50). Определить видимость отрезка  $AB$ .  $O(50, 55, 15)$ ;  $A(95, 20, 25)$ ;  $B(0, 65, 25)$ .

Задача 2. Построить проекции точек пересечения отрезка  $AB$  с поверхностью сферы (рис. 51). Определить видимость.  $O'(50, 40, 40)$ ;  $A(70, 5, 80)$ ;  $B(70, 75, 5)$ .

Задача 3. Построить точки пересечения отрезка  $AB$  прямой линии с поверхностью эллиптического конуса с круговым основанием (рис. 52).



Определить видимость отрезка  $AB$ .  $O(45, 30, 0)$ ;  $S(0, 30, 60)$ ;  $A(15, 35, 65)$ ;  $B(15, 35, 5)$ .

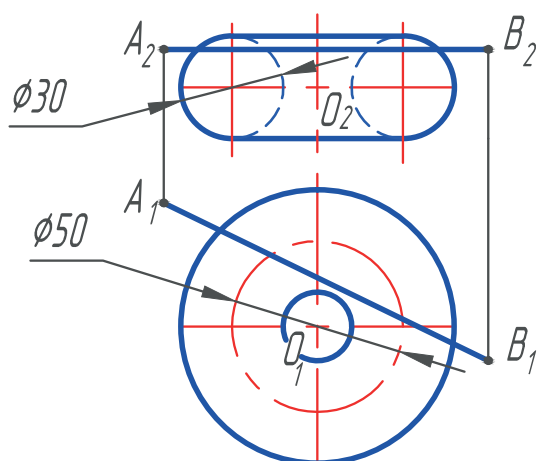


Рис. 50. Пересечение отрезка  $AB$  с поверхностью тора

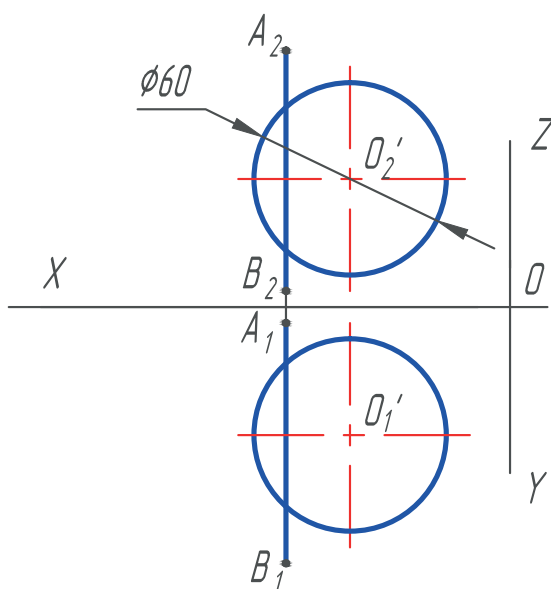


Рис. 51. Пересечение отрезка  $AB$  с поверхностью сферы

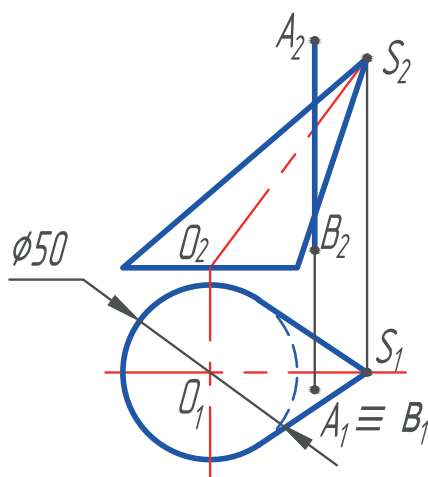


Рис. 52. Поверхность эллиптического конуса с круговым основанием



## 5.4. Взаимное пересечение поверхностей

Взаимное пересечение поверхностей имеет важнейшее значение при конструировании деталей сложной формы, которые можно рассматривать как сочетание простейших геометрических поверхностей: цилиндров, конусов, торов, призм, пирамид (рис. 53).

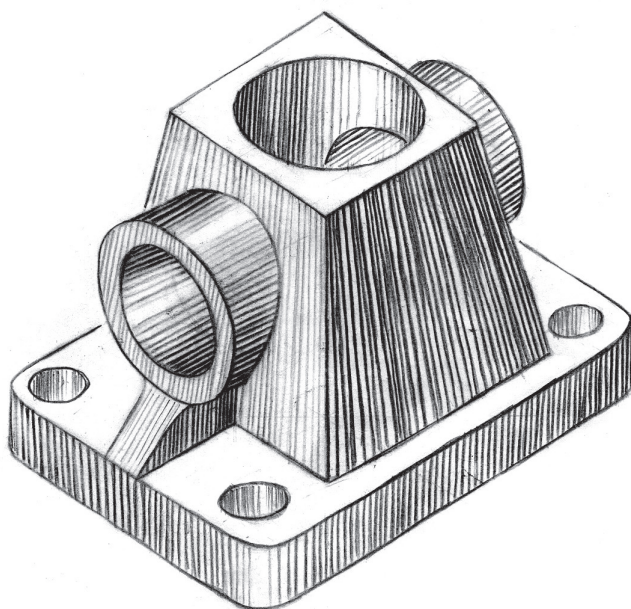


Рис. 53. Построение линий пересечения на техническом рисунке детали

При пересечении поверхностей в зависимости от их вида линия пересечения представляет собой:

- сочетание плоских кривых линий при пересечении поверхности вращения с многогранником;
- кривую пространственную линию четвертого порядка (в общем случае) при пересечении двух поверхностей вращения;
- ломаную линию при пересечении многогранников.

Позиционная задача построения линии пересечения двух поверхностей заключается в определении множества точек, общих для данных поверхностей, которые находятся с помощью посредников — вспомогательных поверхностей.

В качестве посредников используют вспомогательные плоскости или сферические поверхности.

*Алгоритм построения линии пересечения поверхностей способом секущих плоскостей*

1. Построение линии пересечения поверхностей следует начинать с определения характерных, опорных точек. К ним относятся точки, принадлежащие очерковым линиям поверхностей, точки на ребрах многогранника, точки, определяющие видимость линии на плоскости проекций, экстремальные точки, определяющие вершины кривых. Как правило, характерные точки находят без дополнительных построений.

2. Характерные точки позволяют видеть, в каких границах можно применять вспомогательные секущие плоскости, называемые посредниками, при помощи которых на-

ходятся дополнительные или промежуточные точки, одновременно принадлежащие обеим поверхностям, а следовательно, линии их взаимного пересечения.

3. Необходимо выбирать такие вспомогательные плоскости, которые в пересечении с данными поверхностями дают на чертеже простые для построения линии (например, прямые или окружности). Посредники должны быть:

- параллельны плоскостям проекций (плоскости уровня);
- перпендикулярны оси вращения поверхности.

4. В результате пересечения двух поверхностей плоскостью строятся линии пересечения с каждой поверхностью. Точки пересечения построенных линий являются искомыми точками, принадлежащими обеим поверхностям. Построенные точки соединяют плавной кривой линией или прямыми в зависимости от характера линии пересечения.

5. В заключение следует обвести очерки поверхностей и построенные проекции линии пересечения с учетом видимости.

6. Если одна из пересекающихся поверхностей проецирующая (например, прямая призма или прямой круговой цилиндр), то на соответствующей ей плоскости проекций проекция линии пересечения совпадает с вырожденной проекцией поверхности (очерком).

*Пример 1.* Обе поверхности являются проецирующими на фронтальной и профильной плоскостях проекций (рис. 54), поэтому эти проекции линии пересечения поверхностей определены, они совпадают с очерками цилиндров. Обозначаем фронтальные и профильные проекции точек, принадлежащих линии пересечения обоих цилиндров, начиная с характерных точек 1, 2, 3, 4, принадлежащих очерковым линиям цилиндров. Горизонтальную проекцию линии пересечения строим по фронтальной и профильной в проекционной связи.

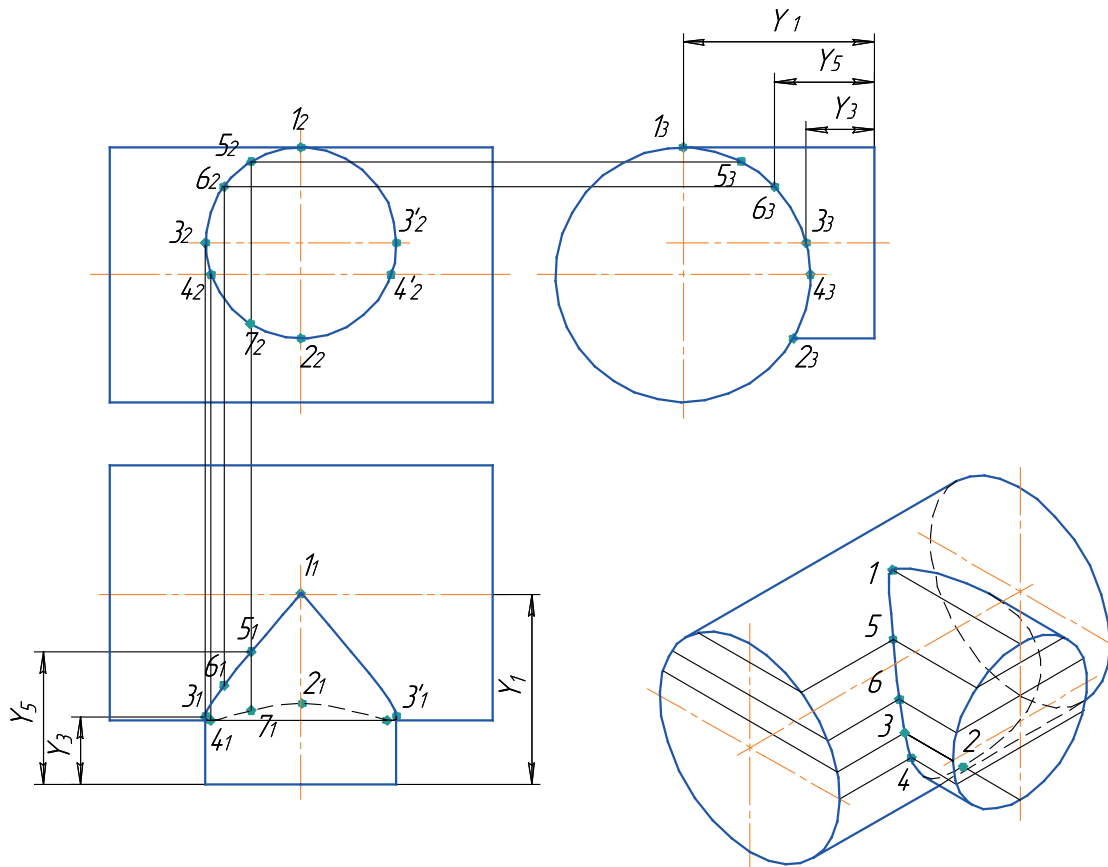


Рис. 54. Построение проекций линии пересечения двух круговых цилиндров

Изометрическую проекцию пересекающихся цилиндров вычерчивают по размерам, взятым с комплексного чертежа. Линию пересечения строят по принадлежности ее цилиндру координатным способом.

**Пример 2.** Построение линии пересечения прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса (рис. 55) состоит в следующем. Ось вращения цилиндра перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, поэтому цилиндрическая поверхность занимает горизонтально проецирующее положение, а горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с очерком цилиндра на горизонтальной плоскости проекций — окружностью. Обозначаем на окружности горизонтальные проекции точек 1, 2, 3, 4.

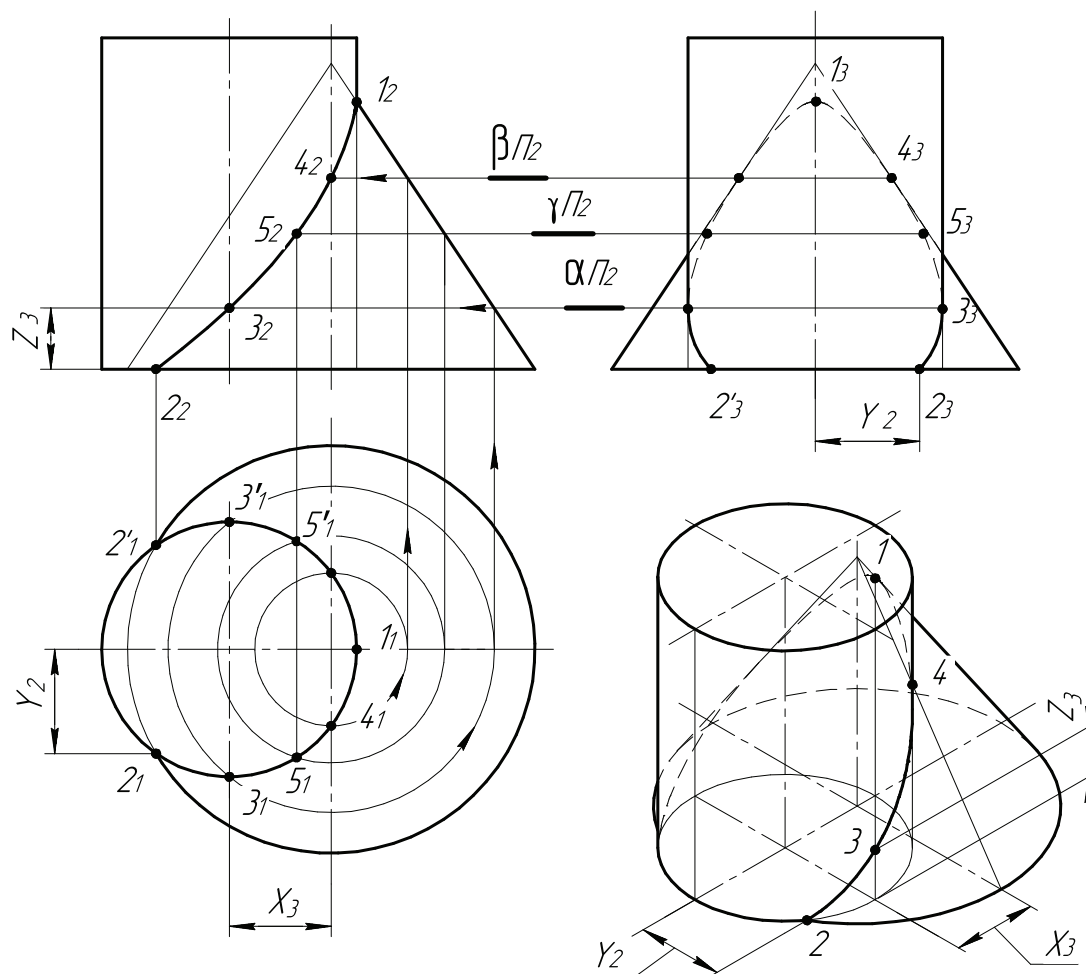


Рис. 55. Построение проекций линии пересечения прямого кругового конуса и прямого кругового цилиндра с параллельными осями

Начинаем построение с характерных точек: 1 — точка пересечения очерков на фронтальной плоскости проекций, так как они лежат в одной плоскости, 2 и 2' — точки пересечения очерков на горизонтальной плоскости проекций — оснований конуса и цилиндра, расположенных в одной плоскости. Эти точки строятся без дополнительных построений. Точки 3 и 3' принадлежат очерковым образующим цилиндра и определяют границу видимости линии пересечения на профильной плоскости проекций, 4 и 4' принадлежат очерковым образующим конуса на профильной плоскости проекций. Остальные точки, например точка 5, берутся произвольно.

Для построения фронтальных проекций рационально выбрать вспомогательные горизонтальные секущие плоскости, которые пересекают конус и цилиндр по окружно-

стям. В сечении цилиндра диаметры окружности одинаковы, а в сечении конуса получаются различные окружности. Через отмеченные точки на горизонтальной проекции проводим горизонтальные проекции этих окружностей и проводим соответствующие им фронтальные проекции — прямые линии, на которых расположены фронтальные проекции искомых точек. Обозначаем следы секущих плоскостей.

Профильную проекцию линии пересечения строим по горизонтальной и фронтальной проекциям в проекционной связи. Соединяем точки плавной линией, так как линия пересечения является пространственной кривой.

Обводим очерки поверхностей с линией их взаимного пересечения с учетом видимости. На фронтальной плоскости проекций линия видна и совпадает с симметричной невидимой линией. На профильной проекции видимая часть линии 2—3 принадлежит видимой половине цилиндра, остальная часть линии пересечения невидима, обводится тонкой штриховой линией.

Построение изометрической проекции пересекающихся поверхностей выполняется по координатам, взятым с ортогональных проекций (см. рис. 55).

*Пример 3.* В процессе построения проекций линии пересечения сферы и поверхности самопересекающегося тора (рис. 56) необходимо учитывать следующее.

Обе поверхности являются непроецирующими поверхностями вращения, поэтому проекции линии пересечения — пространственной кривой 4-го порядка необходимо строить на всех трех плоскостях проекций. Характерные точки 1 и 2 — точки пересечения очерков на фронтальной проекции, потому что очерки лежат в плоскости симметрии. Ось вращения тора перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, поэтому в сечении тора горизонтальными плоскостями уровня получаются окружности. Сфера этими же плоскостями также пересекается по окружностям.

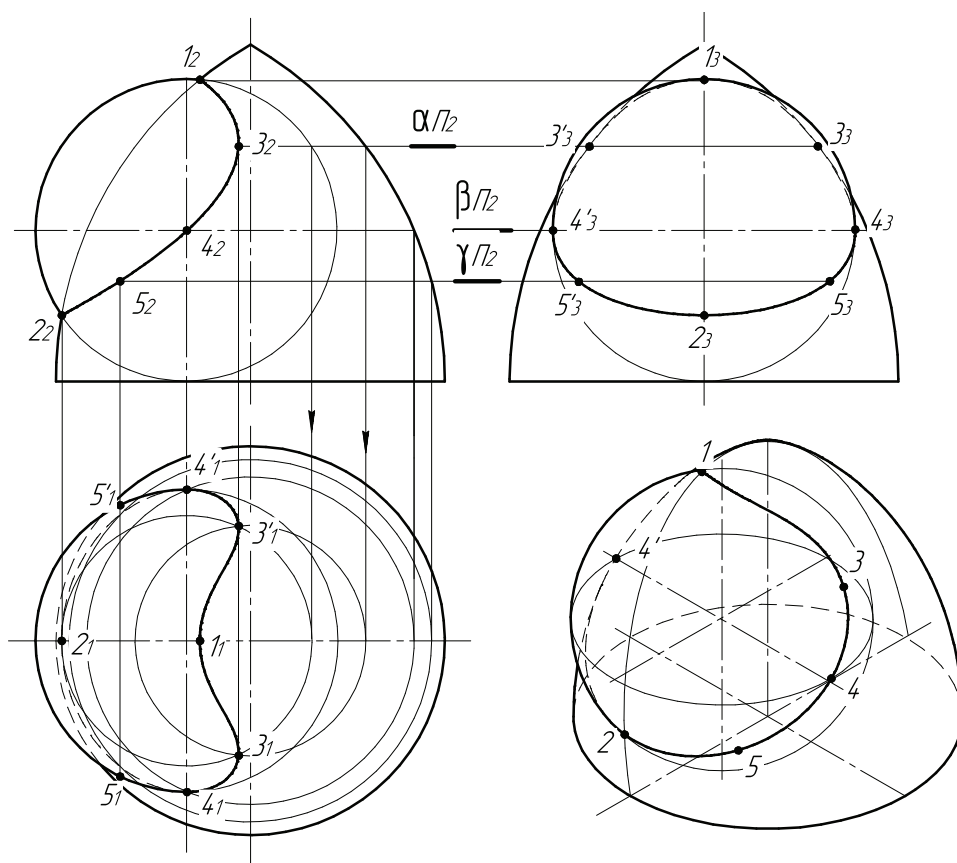


Рис. 56. Построение линии пересечения самопересекающегося тора и сферы

При проведении вспомогательной плоскости  $\beta$  через экватор сферы получаем точки  $3$  и  $3'$  — характерные точки, определяющие границу видимости линии пересечения.

При проведении нескольких параллельных вспомогательных горизонтальных плоскостей  $\alpha$  и  $\gamma$  на горизонтальной плоскости проекций получаются две окружности, точки пересечения которых  $3_1$  и  $5_1$  являются искомыми точками, принадлежащими линии взаимного пересечения поверхностей. Фронтальные проекции точек  $3_2$  и  $5_2$  находят на следах соответствующих вспомогательных плоскостей в проекционной связи.

Профильные проекции точек строят по фронтальной и горизонтальной проекциям, проводя линии проекционной связи. Определяем видимость линии пересечения и очертков поверхностей на горизонтальной, фронтальной и профильной плоскостях проекций по видимости поверхности сферы.

Изометрическую проекцию выполняют аналогичным способом.

#### *Построение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных секущих сфер*

Для построения линии пересечения двух поверхностей вращения в некоторых случаях нерационально использовать в качестве посредников вспомогательные секущие плоскости. При этом целесообразно применять способ вспомогательных концентрических сфер, если соблюдаются следующие условия:

- пересекаются две поверхности вращения;
- оси поверхностей пересекаются между собой в одной точке и параллельны какой-либо плоскости проекций, т. е. поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную этой плоскости проекций.

Сферы обладают большими преимуществами по сравнению с другими посредниками, так как сфера с любой поверхностью вращения, ось которой проходит через центр сферы, пересекается по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси поверхности вращения (рис. 57).

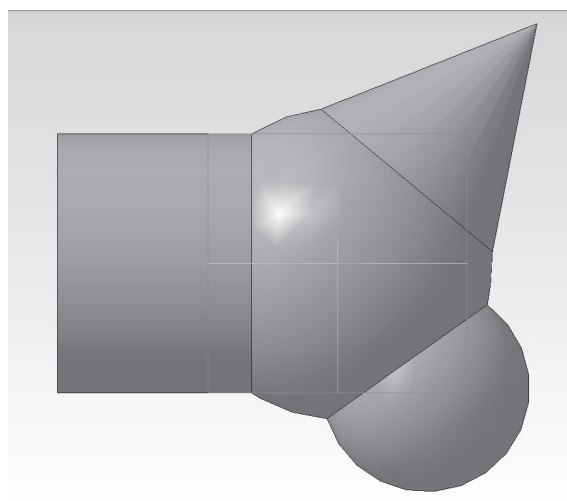
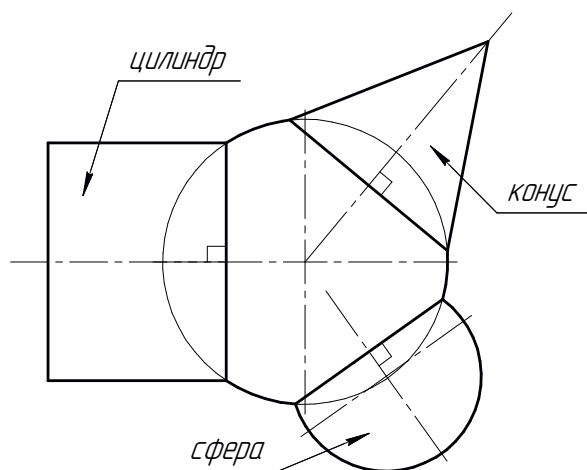


Рис. 57. Пересечение соосных поверхностей

Для построения линии пересечения двух поверхностей вращения методом концентрических сфер задачи решаются в одной фронтальной плоскости проекций (рис. 58, 59).

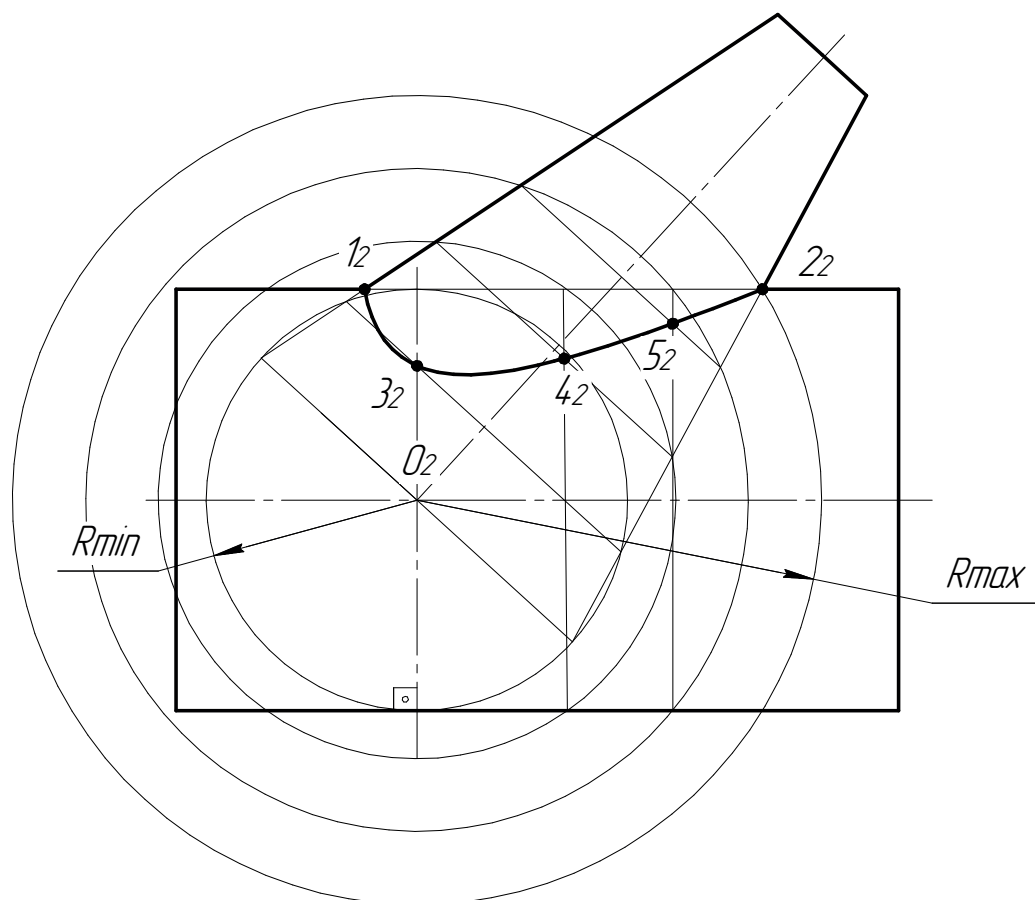


Рис. 58. Пересечение конуса и цилиндра

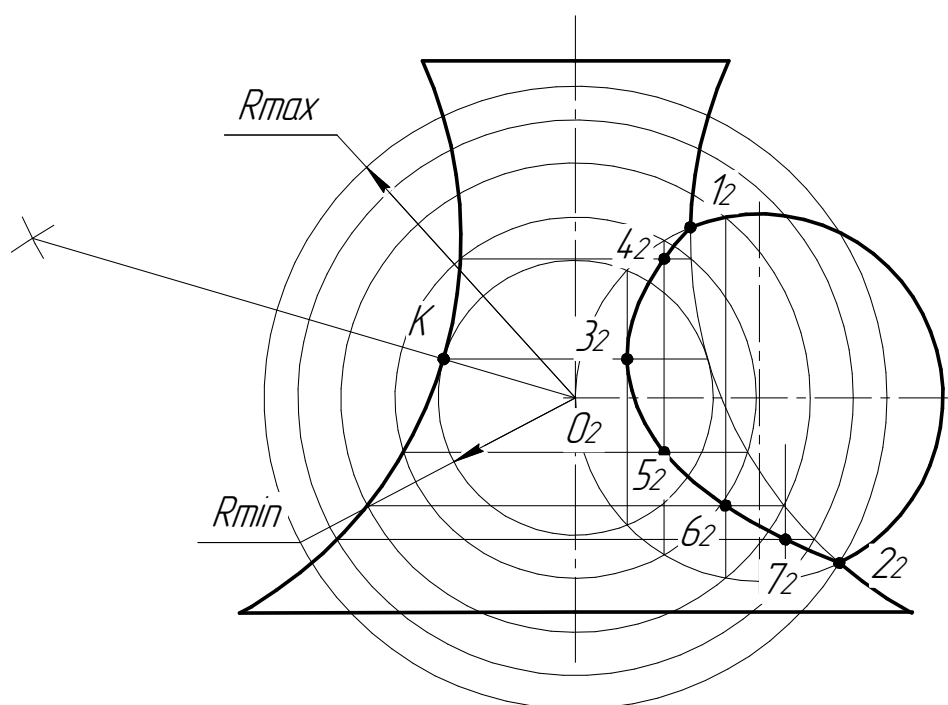


Рис. 59. Пересечение тора-глобоида и сферы



Алгоритм решения задач следующий.

1. Характерные точки пересечения очерков поверхностей  $1$  и  $2$  являются общими точками, так как очерки располагаются в одной плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций.

2. Точку пересечения осей вращения поверхностей  $O$  принимают за центр концентрических сфер, следовательно, сферы являются соосными поверхностями с обеими заданными поверхностями.

3. Строят сферу с минимальным радиусом, вписанную в большую по размеру поверхность и пересекающую меньшую поверхность. Для построения сферы, вписанной в линейчатую поверхность, из точки  $O$  проводят перпендикуляр на очерковую образующую. На рис. 58 сфера вписана в цилиндр. Когда сфера вписывается в криволинейную поверхность, тогда, чтобы найти точку касания (сопряжения) двух дуг, соединяют центры этих дуг. Проводят прямую через центр дуги тора-глобоида и центр сфер  $O$  (рис. 59). Сфера максимального радиуса проводится через наиболее удаленную точку 2 пересечения очерков поверхностей. Вспомогательные сферы проводятся произвольно, больше минимальной, но меньше максимальной.

4. Строятся линии пересечения сфер с заданными поверхностями. Окружности, по которым сферы пересекаются с заданными поверхностями вращения, проецируются в отрезки, перпендикулярные оси вращения на фронтальной плоскости проекций. Линии пересечения, полученные на сфере-посреднике и принадлежащие одновременно заданным поверхностям, пересекаются в точках 3, 4, 5, которые являются общими для данных поверхностей, а следовательно, линиями их взаимного пересечения.

### Вопросы для самоконтроля

---

1. Перечислите основные позиционные задачи на пересечение поверхностей.
2. Сформулируйте общий способ решения позиционных задач.
3. Сформулируйте алгоритм построения точек пересечения прямой с поверхностью.
4. Назовите сечения плоскостью многогранника, цилиндра, конуса, сферы.
5. Какие вспомогательные секущие плоскости необходимо применять в качестве посредников?
6. Назовите условия применения способа концентрических сфер?
7. Почему сферы используют в качестве посредников?
8. Какие точки линии пересечения являются характерными?
9. Какие линии пересечения получаются при пересечении поверхностей вращения, многогранников?

## 6. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

**П**остроение разверток поверхностей широко применяется при создании конструкций из листового материала, выполненных путем изгибания. Разверткой поверхности называется плоская фигура, полученная при совмещении поверхности с плоскостью. Линейчатые поверхности разделяют на развертываемые поверхности, которые можно развернуть на плоскость без складок и разрывов, и неразвертываемые. К развертываемым поверхностям относятся линейчатые коническая и цилиндрическая поверхности. Неразвертываемые — все нелинейчатые поверхности.

Развертки многогранников относятся к точным разверткам и представляют натуральную величину его граней. Рассмотрим способы построения разверток цилиндрических и конических поверхностей. Общим способом построения разверток является их аппроксимация (замена) близкой по форме гранной поверхностью, поэтому развертка этих поверхностей будет приближенной.

На рис. 60, 61 представлены примеры выполнения разверток прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса, усеченных фронтально-проецирующей плоскостью.

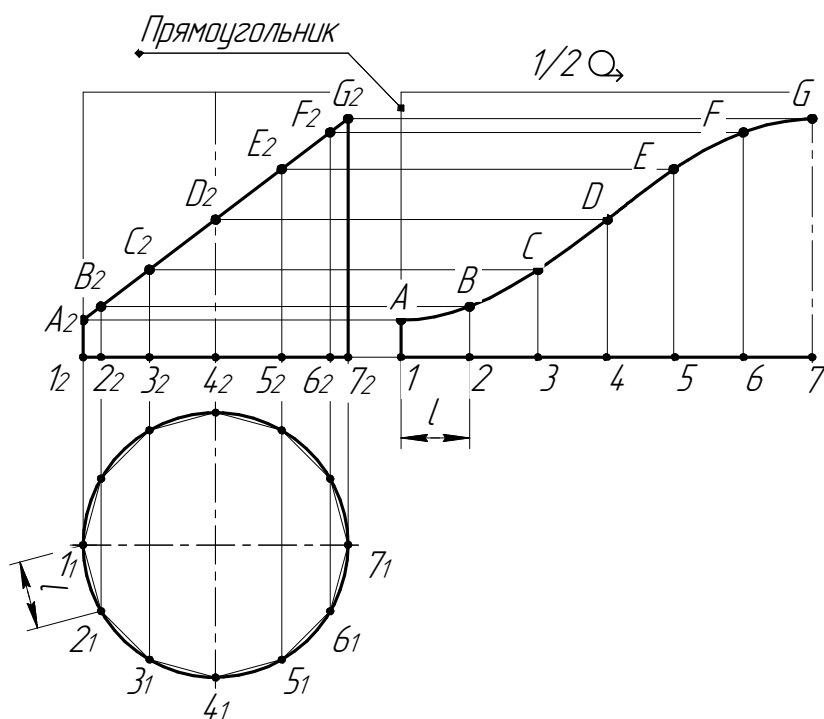


Рис. 60. Построение развертки цилиндра, усеченного фронтально-проецирующей плоскостью



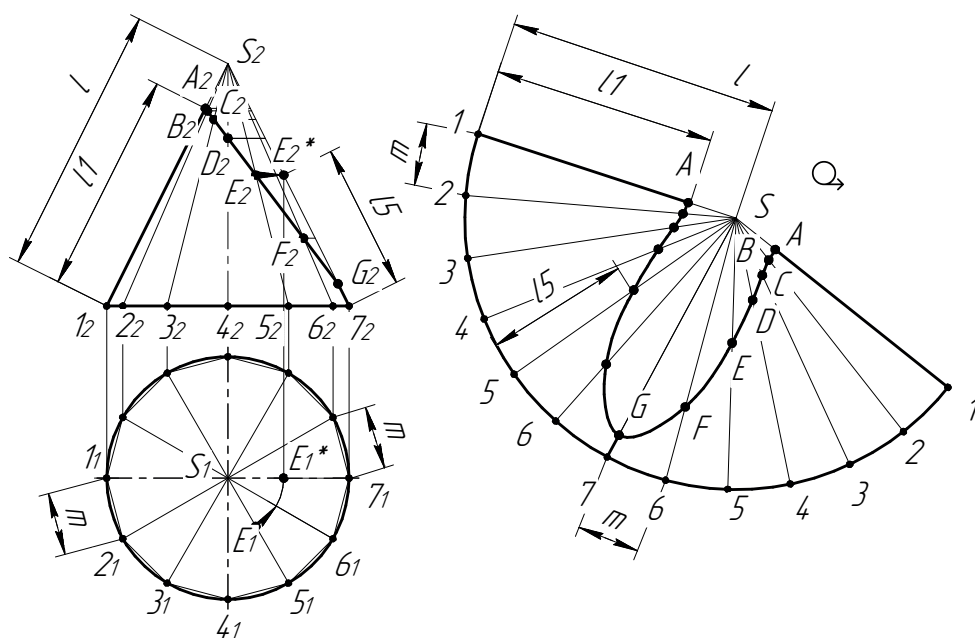


Рис. 61. Построение развертки конуса, усеченного фронтально-проецирующей плоскостью

Алгоритм построения приближенной развертки таков.

1. Поверхность цилиндра аппроксимируют 12-гранной призматической поверхностью, а поверхность конуса аппроксимирована 12-гранной пирамидой. Для этого делят основание цилиндра и конуса на 12 равных частей. Через точки деления проводят прямолinéйные образующие поверхности — ребра вписанного многогранника.

2. Развертка цилиндра представляет прямоугольник, а развертка конуса — сектор круга. На прямой линии развернутого основания цилиндра или на дуге сектора конуса откладывают стороны вписанного многоугольника и также проводят образующие.

3. Образующие цилиндра — прямые частного положения, поэтому длину образующих измеряют на фронтальной проекции и откладывают на соответствующих образующих на развертке. Образующие конуса — прямые общего положения, за исключением очерковых образующих, которые параллельны фронтальной плоскости проекций. Натуральную величину образующих определяют способом вращения вокруг проецирующей прямой, за которую принимают ось конуса, и откладывают на развертке.

4. Полученные точки соединяют плавной кривой. Если развертка представляет симметричную фигуру, достаточно построить ее половину.

При построении разверток поверхностей рекомендуется не убирать тонкие линии построения и обозначать точки построения.

### Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение развертки поверхности.
2. Какими свойствами обладают развертки?
3. Какие поверхности относятся к развертываемым, неразвертываемым?

4. Какие развертки называются точными?
5. Для каких поверхностей строятся условные развертки?
6. В чем заключается предварительная аппроксимация при построении приближенных разверток поверхностей вращения?
7. Сформулируйте алгоритм построения разверток цилиндрической и конической поверхностей.
8. Дайте определения и характеристику основных способов построения разверток: способа нормального сечения, способа раскатки, способа триангуляции.

# КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ЗАЩИТЫ

---

Для подготовки к защите курсовой работы целесообразно воспользоваться следующим перечнем тем.

1. Определение, характеристика, образование поверхности.
2. Каким образом можно построить проекции точек на поверхности?
3. В чем основное отличие линейчатых и нелинейчатых поверхностей?
4. Поверхности вращения, многогранники, их примеры.
5. Сечение поверхности плоскостью. Каким способом можно определить натуральную величину фигуры сечения заданной плоскостью?
6. Построение проекций сечения конуса, цилиндра, сферы и многогранников плоскостями.
7. Каков алгоритм построения проекций геометрических тел с вырезом?
8. Какие точки линии пересечения поверхностей называются характерными?
9. В чем сущность способа вспомогательных секущих плоскостей?
10. Алгоритм построения линии пересечения поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей.
11. Какие три условия должны выполняться при решении задач способом вспомогательных концентрических сфер?
12. Алгоритм построения линии пересечения поверхностей способом вспомогательных концентрических сфер.
13. Какие способы построения разверток поверхностей вы знаете?
14. Развертывающиеся и неразвертывающиеся поверхности.
15. Алгоритм построения разверток конуса и цилиндра.
16. Определение и виды аксонометрических проекций.
17. Каковы коэффициенты искажения по аксонометрическим осям при построении прямоугольной изометрической проекции?
18. Определите последовательность построения аксонометрических проекций плоских фигур. В чем сходство построения геометрических фигур и геометрических тел в аксонометрии?
19. Каким образом применяется координатный способ построения аксонометрической проекции объекта по его ортогональным проекциям?
20. Каким образом с применением метода конкурирующих точек определяются границы видимости на поверхности?

# РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

---

Балягин, С. Н. Черчение : справ. пособие / С. Н. Балягин. — 4-е изд., доп. — Москва : АСТ : Астрель, 2005. — 421 с.

Григорьев, В. Г. Инженерная графика : учеб. для вузов / В. Г. Григорьев, В. И. Горячев, Т. П. Кузнецова. — Москва : Мир Автокниг, 2007. — 464 с.

Лукинских, С. В. Инженерная графика: Начертательная геометрия : учеб. пособие / С. В. Лукинских, Л. В. Баранова, Т. И. Сидякина ; науч. ред. С. В. Лукинских ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 100 с.

Миронов, Б. Г. Сборник заданий по инженерной графике : учеб. пособие / Б. Г. Миронов, Р. С. Миронова. — 4-е изд., испр. — Москва : Высш. шк., 2006. — 264 с.

Нартова, Л. Г. Начертательная геометрия: учеб. для вузов / Л. Г. Нартова, В. И. Якунин. — Москва : Дрофа, 2003. — 208 с.

Начертательная геометрия : учеб. для вузов / Н. И. Крылов [и др.] ; под ред. Н. И. Крылова. — М. : Высш. шк., 2000. — 224 с.

Относительное положение геометрических объектов : учеб.-метод. пособие по выполнению курсовой работы / Т. И. Кириллова [и др.]. — Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2008. — 38 с.

Сидякина, Т. И. Взаимное пересечение поверхностей в ортогональных и аксонометрических проекциях : учеб.-метод. пособие по выполнению курсовой работы / Т. И. Сидякина, Л. Ю. Стриганова. — Екатеринбург : УрФУ, 2011. — 53 с.

Стриганова, Л. Ю. Технический рисунок : учебное пособие / Л. Ю. Стриганова, Т. И. Сидякина. — 2-е изд. доп. и перераб. — Екатеринбург : УрФУ, 2012. — 72 с.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1

---

## Требования к выполнению курсовой работы «Взаимное пересечение поверхностей в ортогональных и аксонометрических проекциях»

---

Целью курсовой работы является овладение теоретической основой решения позиционных задач, приобретение практических навыков выполнения ортогональных и аксонометрических проекций пространственных объектов на плоскости.

Курсовая работа оформляется в виде альбома с титульным листом и состоит из графической части и пояснительной записки. Графическая часть содержит 4 листа формата А3 (рис. П1.1–П1.4).

Оформление чертежей выполняется в соответствии с требованиями стандартов ЕСКД (Единой системы конструкторской документации):

- ГОСТ 2.301–68 «Форматы»;
- ГОСТ 2.303–68 «Линии»;
- ГОСТ 2.304–81 «Шрифты чертежные»;
- ГОСТ 2.307–68 «Нанесение размеров»;
- ГОСТ 2.104–2006 «Основные надписи».

Основная надпись на чертежах выполняется по форме 1, на первом листе пояснительной записки — по форме 2, на последующих листах по — форме 2а (прил. 6). Структура обозначения чертежей в основной надписи:

XXXX. 000 000. XXX  
↑            ↑            ↑  
№ задания № листа № варианта

Например, обозначение листов курсовой работы для 30-го варианта будет таким:

*1401. 000 001. 030* — лист 1, вариант 30

*1401. 000 002. 030* — лист 2, вариант 30

На образцах выполнения графической части курсовой работы (рис. П1.1–П1.4) приводятся примеры оформления листов на форматах. Так, например, в соответствии с ГОСТ 2.303–68 «Линии» сплошной толстой основной линией производится обводка линий видимого контура поверхностей и линий их пересечения. Линии невидимого контура поверхности — штриховой, линии построения — сплошной тонкой и т. п. В соответствии с ГОСТ 2.304–81 «Шрифты чертежные» надписи на чертежах и буквенно-цифровые обозначения выполняются шрифтами № 5 и № 7.

Пояснительная записка — текстовый конструкторский документ, оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ 2.106–68. В пояснительной записке следует изложить алгоритм выполнения заданий, обосновать применяемые способы решения и выполненные графические построения.

В пояснительной записке представляется письменный алгоритм (компьютерный вариант) выполнения каждого чертежа. При наборе на ПК целесообразно использовать гарнитуру GOST type A или GOST type B, шрифт наклонный или прямой, выравнивание

по ширине, кегль — 14 пт, межстрочный интервал — 1,5, отступ первой строки — 1,25 см с автоматической расстановкой переносов. Титульный лист к курсовой работе выполняется по образцу.

Критерием оценки курсовой работы является качество выполненных задач на основании трех показателей:

- правильности и аккуратности исполнения чертежей;
- аргументированности и логичности пояснительной записки;
- знания алгоритмов выполнения позиционных задач и способов построения аксонометрических изображений. При защите курсовой работы необходимо уметь изложить их в устной форме.

Далее приведены примеры оформления графических листов.

#### *Лист 1. Геометрическое тело с вырезом*

1. По заданной фронтальной проекции геометрического тела с вырезом начертить в проекционной связи горизонтальную и профильную проекции.

2. Дать анализ заданной поверхности и ее положения относительно плоскостей проекций.

3. Назвать плоскости, которыми выполнен вырез, и определить характер плоских линий, полученных в сечении, (эллипс, парабола, окружность, многоугольник и т. п.).

Построить линии выреза по точкам, начиная с характерных.

4. Определить дополнительные (промежуточные) точки линии выреза с помощью вспомогательных секущих плоскостей-посредников.

5. Соединить полученные точки с учетом характера кривой или прямой линией.

6. Определить видимость линий выреза и очерка заданного геометрического тела.

7. Вычертить аксонометрическую проекцию заданного геометрического тела на свободном месте поля чертежа.

8. Обвести изображения с учетом видимости проекций.

9. Заполнить основную надпись.

#### *Лист 2. Пересечение поверхности вращения с многогранником.*

#### *Лист 3. Пересечение двух поверхностей вращения*

1. По заданным ортогональным проекциям поверхностей в проекционной связи (прил. 3 и 4) построить третью проекцию.

2. Дать анализ и характеристику заданных поверхностей.

3. Определить вид линии пересечения данных поверхностей.

4. Отметить характерные (опорные) точки.

5. Провести вспомогательные секущие плоскости и построить дополнительные, промежуточные точки линии пересечения.

6. Соединить полученные точки с учетом характера линий.

7. Определить видимость и обвести проекции поверхностей с линией их взаимного пересечения.

8. Построить прямоугольную изометрическую проекцию по ортогональным проекциям координатным способом.

#### *Лист 4. Взаимное пересечение поверхностей (метод вспомогательных концентрических сфер). Развертка*

1. Построить фронтальную проекцию заданных поверхностей вращения (прил. 5).

2. Дать характеристику заданных поверхностей, линии их взаимного пересечения и способа решения.
3. Обозначить точки пересечения очерковых образующих поверхностей.
4. Обозначить точку  $O$  пересечения осей вращения поверхностей.
5. Построить сферу минимального радиуса ( $R_{\min}$ ) и сферу максимального радиуса ( $R_{\max}$ ).
6. Провести радиусы вспомогательных концентрических сфер  $R$  ( $n$  раз), которые должны изменяться в пределах  $R_{\min} < R < R_{\max}$ . Построить линии пересечения вспомогательных сфер с заданными поверхностями и найти точки пересечения этих линий.
7. Соединить полученные точки плавной кривой линией, выполнить обводку проекции с учетом видимости.

*Министерство образования и науки Российской Федерации  
Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина*

*Кафедра инженерной графики*

*Курсовая работа  
по дисциплине "Технический рисунок"*

*на тему: "Взаимное пересечение поверхностей  
в ортогональных и аксонометрических  
проекциях"*

*14.01. 000 000 030*

*Преподаватель:*

*Студент гр. ГИ-173102*

\_\_\_\_\_ *Т.И. Сидякина*

\_\_\_\_\_ *Г.И. Иванов*

*Допускается к защите*

*Оценка работы* \_\_\_\_\_

*Дата* \_\_\_\_\_

*Екатеринбург, 2018*



Перв. примен.	<h2>Содержание</h2>						
	<p>1. Геометрическое тело с вырезом. Лист 1 Прямая правильная пятиугольная призма .....2</p> <p>2. Пересечение поверхности вращения с многогранником. Лист 2 Прямой круговой конус и прямая треугольная призма ..... 5</p> <p>3. Пересечение двух поверхностей вращения. Лист 3. Полусфера и прямой круговой цилиндр.....8</p> <p>4. Взаимное пересечение поверхностей (метод вспомогательных концентрических сфер). Лист 4. Пересечение двух круговых конусов. Развертка боковой поверхности конуса ..... 11</p>						
Справ. №							
Подп. и дата							
Взам. инв. №							
Инв. № докум.							
Подп. и дата							
Инв. № подл.	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		
	Разраб.		Иванов Г.И.				
	Проб.		Сидякина Т.И.				
	Н.контр.		Стриганова Л.Ю.				
	Утв.		Семенова Н.В.				
14.01. 000 000. 030							
Взаимное пересечение поверхностей в ортогональных и аксонометрических проекциях					Лит.	Лист	Листов
						1	13
					УрФУ каф. ИГ гр. ГИ-173102		
Копировал					Формат А4		

## Лист 1. Прямая правильная пятиугольная призма с вырезом

1. В условии заданы фронтальная и профильная проекции прямой правильной пятиугольной призмы. Строим горизонтальную проекцию по указанным размерам.

2. Прямая призма – это многогранник, основания которого – конгруэнтные многоугольники, а боковые грани – прямоугольники. Основание призмы – равносторонний пятиугольник, параллельный профильной плоскости проекций  $P_3$ . Боковая поверхность призмы – профильно-проецирующая.

3. Вырез выполнен горизонтальными  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\delta$ -,  $\psi$  и профильными  $\mu$ -,  $\tau$ -,  $\gamma$ - плоскостями уровня. При пересечении многогранника плоскостями в сечении получают плоские многоугольники.

Вершины многоугольников – точки пересечения секущих плоскостей с ребрами призмы, а стороны многоугольников – линии пересечения секущих плоскостей выреза с гранями призмы, т. е. прямые линии.

4. Отмечаем фронтальные проекции точек линии выреза  $1_2, 2_2, 3_2, \dots, 13_2$ . Профильные проекции этих точек принадлежат очерку призмы на плоскости проекций  $P_3$ .

Характерными точками линии пересечения являются точки на ребрах призмы  $3, 6, 9, 12, 13$ .

5. Горизонтальные проекции точек  $1_1, 2_1, 3_1$  и т.д. строим по фронтальной и профильной проекциям, проводя соответствующие линии проекционной связи.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № докл.	Подп. и дата		Лист
					1401. 000 000. 030	3
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		

Копировал

Формат А4

6. Построенные проекции точек соединяем прямыми линиями и получаем горизонтальные проекции линии выреза.

7. Определяем видимость призмы с вырезом на горизонтальной и профильной плоскостях проекций.

8. Вычерчиваем прямоугольную изометрическую проекцию призмы с вырезом:

- проводим оси координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в изометрии;
- строим основания призмы в профильной

плоскости по координатам  $z$  и  $y$ ;

- проводим ребра призмы параллельно оси  $x$ ;
- строим аксонометрические проекции точек

1, 2, 3, 4, 5 и т.д. линии выреза по координатам с ортогональной проекции и соединяем их прямыми линиями;

– определяем видимость и обводим линии контура призмы с вырезом основной линией чертежа, оставляя все построения.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № докл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

1401. 000 000. 030

Лист  
4

Копировал

Формат А4



## Лист 2. Пересечение прямого кругового конуса и прямой треугольной призмы

1. В условии заданы фронтальная и горизонтальная проекции прямого кругового конуса и прямой треугольной призмы. Строим профильную проекцию поверхностей.

2. Прямой круговой конус образован вращением прямой линии вокруг неподвижной оси, пересекающей ее образующей. Ось конуса – горизонтально-проецирующая прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций. Призма – многогранник, основания которого – конгруэнтные прямоугольные треугольники, а боковые грани – прямоугольники. Основания призмы расположены параллельно фронтальной плоскости проекций.

Боковая поверхность призмы фронтально-проецирующая, поэтому проекция линии пересечения призмы и конуса на фронтальной плоскости проекций совпадает с очерком призмы.

3. Линия пересечения призмы и конуса – сочетание плоских кривых линий, которые получаются в пересечении граней призмы и конической поверхности. Грань призмы, параллельная горизонтальной плоскости проекций, пересекает конус по окружности, которая на горизонтальной плоскости проекций проецируется в натуральную величину.

В пересечении грани, параллельной профильной плоскости проекций, получается гипербола, которая на профильной плоскости проекций проецируется в натуральную величину, на фронтальной и горизонтальной плоскости в отрезки прямой.

Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инд. №	Инд. № докл.	Подп. и дата
1401. 000 000. 030				
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
				Лист
				5

Копировал

Формат А4

Третья грань призмы – фронтально-проецирующая плоскость – пересекает коническую поверхность по эллипсу.

4. Фронтальная проекция линии пересечения определена, она совпадает с очерком призмы.

Отмечаем фронтальные проекции точек, необходимых для построения линии пересечения.

Построение горизонтальной и профильной проекций линии пересечения начнем с определения характерных (опорных) точек:

– 1 и 5 – точки пересечения очерков поверхностей на фронтальной плоскости проекций, т.к. очерки расположены в одной плоскости, которая является плоскостью симметрии поверхностей;

– 2 и 2' – точки, принадлежащие очерковым образующим конуса на профильной плоскости проекций. Эти точки определяют границу видимости линии пересечения на профильной плоскости проекций;

– 3 и 4 – точки на ребрах многогранника;

– 6 – середина эллипса, определяет малую ось эллипса.

5. Характерные точки 3, 4, 6, а также дополнительные или промежуточные точки 7, 8, 9, 10 строятся при помощи проведения через них вспомогательных горизонтальных секущих плоскостей  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$  и  $\mu$ , которые пересекают конус по окружности, а призму по прямым линиям.

Точки пересечения этих линий на горизонтальной плоскости проекций являются искомыми точками, принадлежащими одновременно поверхностям конуса и призмы, а следовательно, линии их пересечения.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	1401. 000 000. 030	Лист
						6
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		

Копировал

Формат А4



Профильные проекции точек линии пересечения строим по фронтальной и горизонтальной проекциям в проекционной связи.

6. На горизонтальной плоскости проекций соединяем точки эллипса плавной сплошной основной линией видимого контура, невидимую часть линии пересечения – часть окружности и невидимую часть основания конуса – тонкой штриховой линией.

На профильной плоскости проекций видимую часть эллипса до очерка соединяем плавной сплошной основной линией, часть эллипса за очерком, а также точки гиперболы соединяем плавной тонкой штриховой линией.

Очерки поверхностей обводим также с учетом видимости.

7. Прямоугольную изометрическую проекцию поверхностей с линией пересечения строим на свободном месте чертежа, измеряя размеры поверхностей параллельно осям координат  $x, y, z$  на ортогональных проекциях и откладывая эти размеры параллельно аксонометрическим осям, соответственно параллельно  $x, y, z$ .

Аксонометрическую проекцию линии пересечения строим на поверхности призмы также координатным способом.

Обводим линии контура поверхностей с линией их пересечения с учетом видимости.

Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инд. №	Инд. № докл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	14.01. 000 000. 030	Лист 7
------	------	----------	-------	------	---------------------	-----------

Копировал

Формат А4

### Лист 3. Пересечение полусферы с поверхностью прямого кругового цилиндра

1. По условию заданы фронтальная и горизонтальная проекции полусферы и прямого кругового цилиндра.

Строим профильную проекцию поверхностей.

2. Сфера образуется вращением окружности вокруг одного из диаметров. Очерком фронтальной проекции является главный меридиан, очерком горизонтальной проекции является экватор.

Прямой круговой цилиндр образуется вращением прямой линии вокруг неподвижной оси, параллельной образующей.

Ось цилиндра – горизонтально-проецирующая прямая.

Поэтому поверхность цилиндра является проецирующей относительно той же плоскости проекций и проецируется в окружность, а горизонтальная проекция линии пересечения сферы и цилиндра совпадает с очерком цилиндра.

3. Линия пересечения двух поверхностей вращения является пространственной кривой. Горизонтальная проекция линии пересечения цилиндра и полусферы определена, она совпадает с вырожденной проекцией цилиндра.

Отмечаем горизонтальные проекции точек, необходимых для построения линии пересечения.

4. Построение фронтальной и профильной проекции начинаем с определения характерных (опорных) точек:

Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инд. № докл.	Подп. и дата					1401. 000 000. 030		Лист
					Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		8

Копировал

Формат А4



- 1 – точка касания цилиндрической поверхности и экватора сферы;
- 2 и 3 – точки, принадлежащие линии главного меридиана сферы;
- 4 и 5 – точки, принадлежащие очерковым образующим цилиндра на фронтальной плоскости проекций. Эти точки определяют границу видимости линии пересечения на фронтальной плоскости проекций;
- 6 и 7 – точки, принадлежащие очерковым образующим цилиндра на профильной плоскости проекций. Эти точки определяют границу видимости линии пересечения на профильной плоскости проекций;
- 8 и 9 – точки, принадлежащие очерку сферы на профильной плоскости проекций.

5. Характерные точки 1, 2, 3 строятся без дополнительных построений в проекционной связи. Точки 4, 5, 6, 7, 8, 9, а также дополнительные, промежуточные точки 10, 11, 12, 13 строятся при помощи проведения через них вспомогательных фронтальных секущих плоскостей  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$  и т.д., которые пересекают сферу по окружности, а цилиндр по прямым линиям.

Точки пересечения этих линий на фронтальной плоскости проекций являются искомыми точками, принадлежащими одновременно поверхностям цилиндра и полусферы, а следовательно, линии пересечения.

Третью профильную проекцию линии пересечения строим в проекционной связи по горизонтальной и фронтальной проекциям.

Изм. №	Подп.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инд. №	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	14.01. 000 000. 030	Лист
						9

Копировал

Формат А4



6. На фронтальной и профильной плоскостях проекций видимость определяет цилиндрическая поверхность. Видимой частью поверхности цилиндра является ближайшая к наблюдателю половина поверхности цилиндра.

Соединяем полученные точки плавной кривой линией с учетом видимости.

Точки  $4_2$ ,  $13_2$ ,  $1_2$ ,  $10_2$ ,  $6_2$ ,  $9_2$ ,  $12_2$ ,  $5_2$  соединяем основной сплошной линией видимого контура.

Точки  $4_2$ ,  $2_2$ ,  $11_2$ ,  $7_2$ ,  $8_2$ ,  $3_2$ ,  $5_2$  – штриховой тонкой линией невидимого контура.

На профильной плоскости проекций основной сплошной линией соединяем точки  $7_3$ ,  $11_3$ ,  $2_3$ ,  $4_3$ ,  $13_3$ ,  $1_3$ ,  $10_3$ ,  $6_3$ , остальные точки – штриховой тонкой линией.

7. Прямоугольную изометрическую проекцию поверхностей строим координатным способом, измеряя размеры на ортогональных проекциях.

АксонOMETрическую проекцию линии пересечения цилиндра и полусферы строим на поверхности цилиндра, проводя образующие цилиндра.

Обводим контур поверхностей с линией пересечения на основе определения видимости линий пересечения.

Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инд. №	Инд. № доп.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

1401. 000 000. 030

Лист  
10

Копировал

Формат А4

## Лист 4. Взаимное пересечение прямого кругового цилиндра и конуса Развертка боковой поверхности конуса

1. Строим фронтальную проекцию двух заданных поверхностей: прямого кругового конуса с горизонтально проецирующей осью и усеченного конуса с осью вращения, параллельной фронтальной плоскости проекций.

2. Линией взаимного пересечения двух поверхностей вращения является пространственная кривая линии четвертого порядка. Для построения линии пересечения двух поверхностей вращения с пересекающимися осями, лежащими в общей плоскости симметрии, параллельной фронтальной плоскости проекций, можно применить способ вспомогательных концентрических сфер.

3. Характерными (опорными) точками 1 и 2 линии пересечения являются точки пересечения очерковых образующих поверхностей, потому что очерки лежат в общей плоскости.

4. Обозначаем точку  $O$  пересечения осей вращения конусов и принимаем эту точку за центр вспомогательных сфер.

5. Наименьшая сфера, которую можно провести для построения общих точек линии пересечения, есть сфера, вписанная в большую по размеру поверхность.

Из центра  $O$  проводим очерк сферы минимального радиуса, вписанной в конус с горизонтально-проецирующей осью вращения.

Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инд. №	Инд. № докл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

14.01.000.000.030

Лист  
11

Копировал

Формат А4

Точка касания и радиус  $R_{\min}$  определяется путем проведения перпендикуляра на очерковую образующую конуса.

Построим линии пересечения сферы минимального радиуса с двумя конусами, находим общую точку 3, которая является самой глубокой точкой линии пересечения.

Из центра  $O$  строим очерк сферы максимального радиуса  $R_{\max}$  через наиболее удаленную точку 2 пересечения очерков поверхностей.

6. Проводим последовательно очерки трех дополнительных вспомогательных сфер радиусами больше  $R_{\min}$  и меньше  $R_{\max}$ . Каждая из этих сфер, пересекаясь с заданными коническими поверхностями, образует семейство окружностей, которые проецируются в прямые отрезки, перпендикулярные осям вращения конусов.

Точки пересечения окружностей 4, 5, 6 принадлежат одновременно вспомогательной сфере и заданным поверхностям, следовательно, по этим точкам можно построить линии их пересечения.

7. Полученные фронтальные проекции точек линии пересечения соединим видимой кривой линией.

Невидимая на фронтальной плоскости проекций часть линии пересечения симметрична и совпадает с построенной.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

14.01.000.000.030

Лист  
12

Копировал

Формат А4



## Развертка поверхности Р

1. Начертим отдельно на свободном месте поля чертежа фронтальную и горизонтальную проекции конуса, обозначенного буквой Р.

Скопируем точки построенной линии пересечения координатным способом.

2. Для построения приближенной развертки прямого кругового конуса необходимо аппроксимировать (заменить) коническую поверхность вписанной в него 12-ти гранной пирамидой.

3. Развертка боковой поверхности прямого кругового конуса – круговой сектор. Радиус кругового сектора равен длине образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания. Очерковые образующие  $S_1$  и  $S_8$  параллельны фронтальной плоскости проекций – фронтальные прямые, поэтому проецируются на эту плоскость в натуральную величину.

На дуге сектора последовательно откладываем 12 отрезков, равных ширине граней пирамиды ( $m$ ), измеренных на горизонтальной проекции – расстояние  $1_1 2_1 = 2_1 4_1$  и т. д. Точка 3 – дополнительная экстремальная точка.

Соединяем построенные точки с вершиной конуса. В связи с тем что полученная фигура развертываемой поверхности симметрична, можно построить ее половину.

Для построения половины развертки достаточно отложить 6 равных отрезков.

Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инд. №	Инд. № докл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	14.01. 000 000. 030	Лист 13
------	------	----------	-------	------	---------------------	------------

Копировал

Формат А4

4. Ребра пирамиды  $S_2, S_3, S_4$  и т.д., аппроксимирующей коническую поверхность, за исключением ребер  $S_1$  и  $S_8$ , непараллельны плоскости проекций – прямые общего положения.

Поэтому необходимо определить их натуральные величины способом вращения вокруг проецирующей прямой, за которую принимают ось вращения конуса.

Измеряем натуральную величину образующих  $SA, SB, SC, SD, SE$  и т. д. на очерковой линии и откладываем на развертке.

5. Полученные точки  $A, B, C, D, E, F, K, L$  соединяем плавной кривой линией по лекалу, обведем основной сплошной линией контур развертки, проведем ось симметрии развертки штрихпунктирной тонкой линией.

Обозначим половину развертки  $1/2 Q, P$ .

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дудл	Подп. и дата	1401. 000 000. 030	Лист
						14
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Копировал	Формат A4





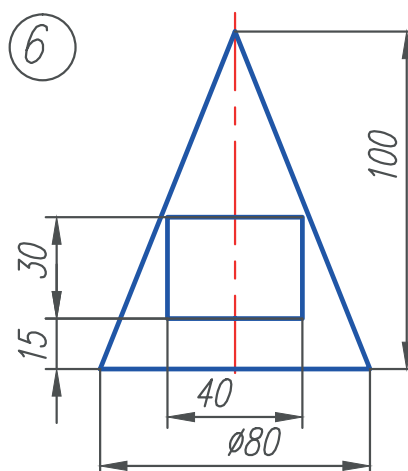
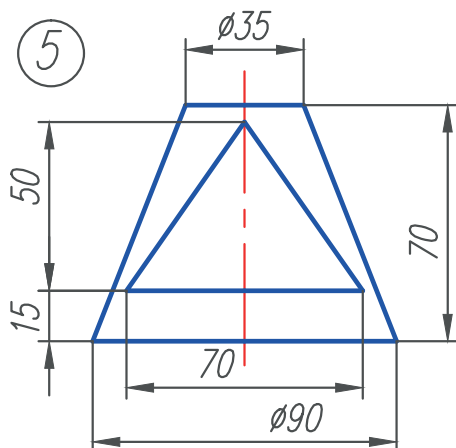
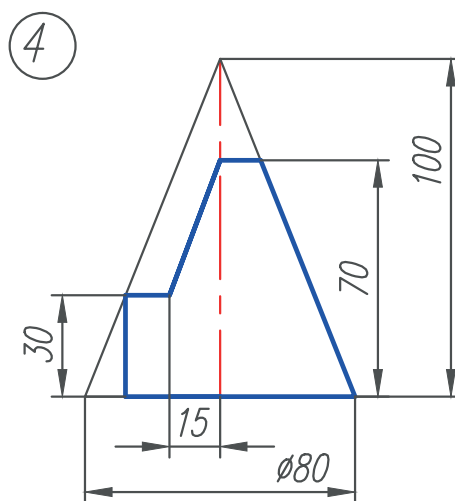
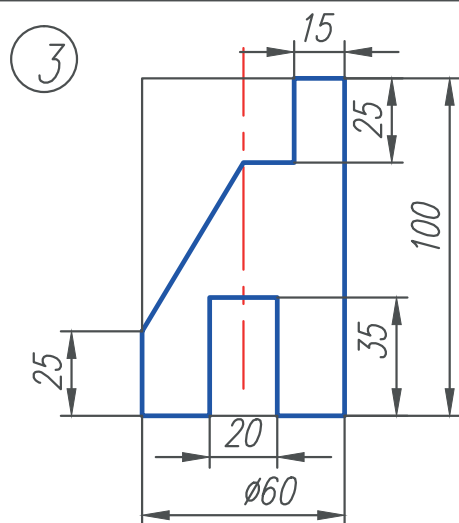
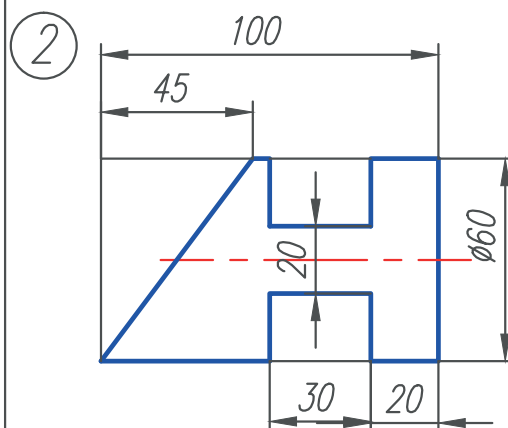
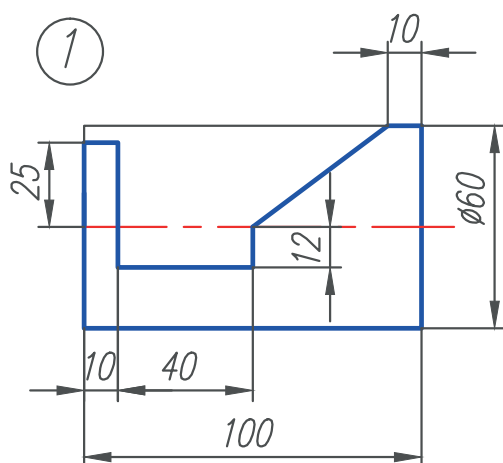




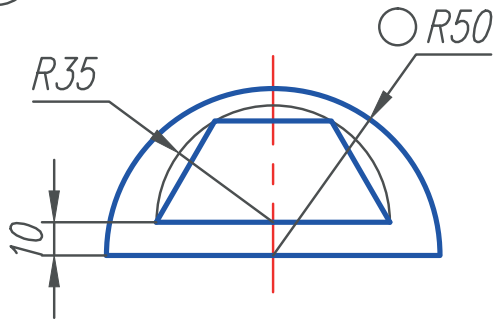


## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

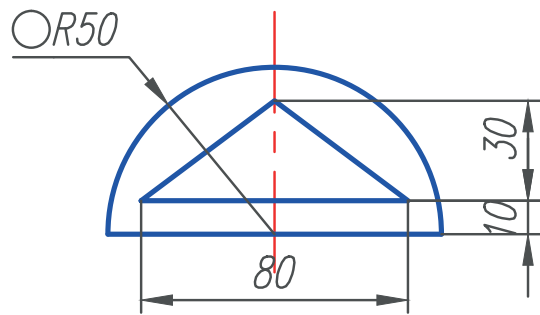
### Индивидуальные задания к листу 1 «Геометрическое тело с вырезом»



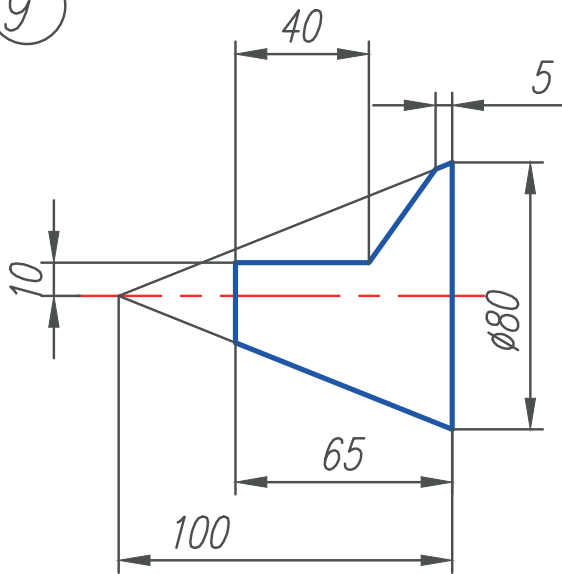
7



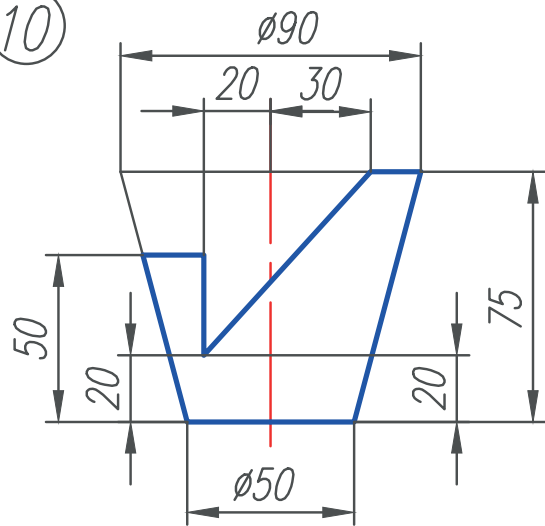
8



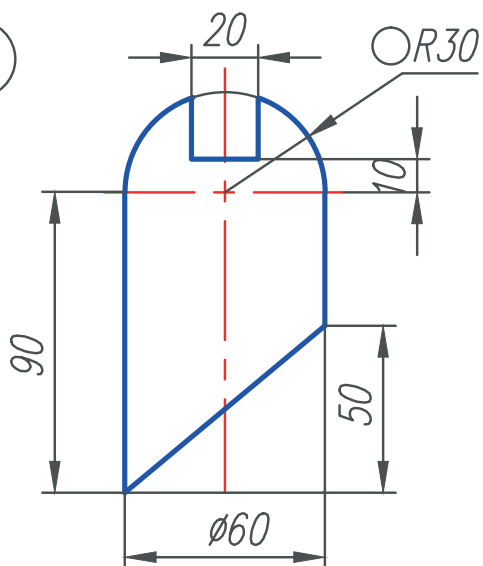
9



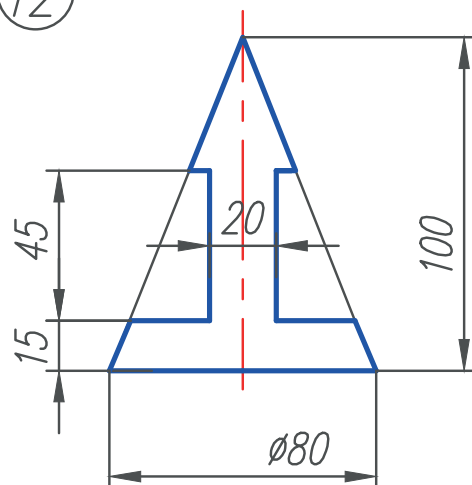
10



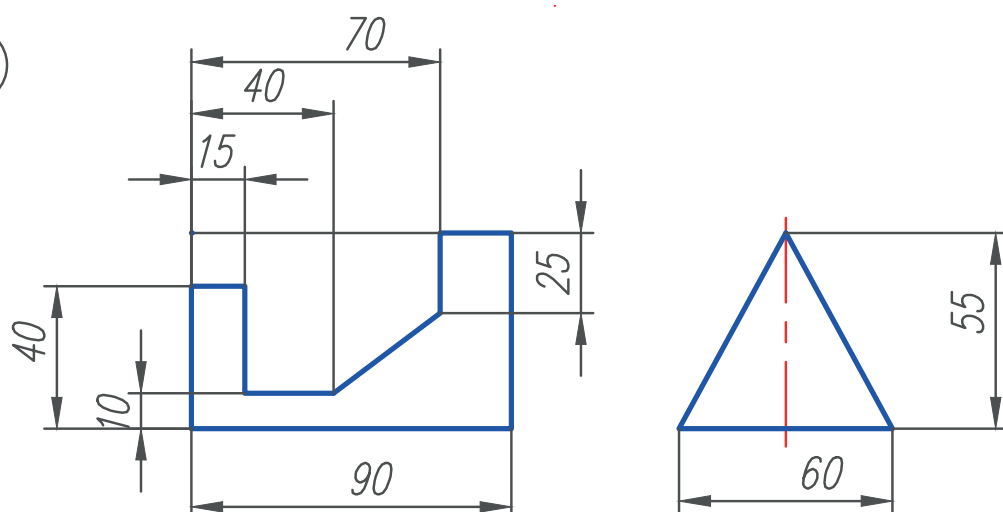
11



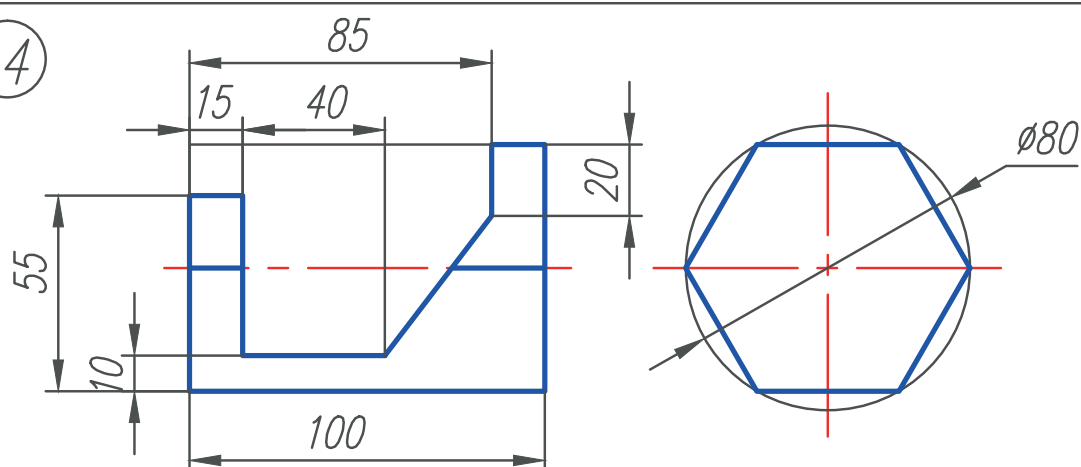
12



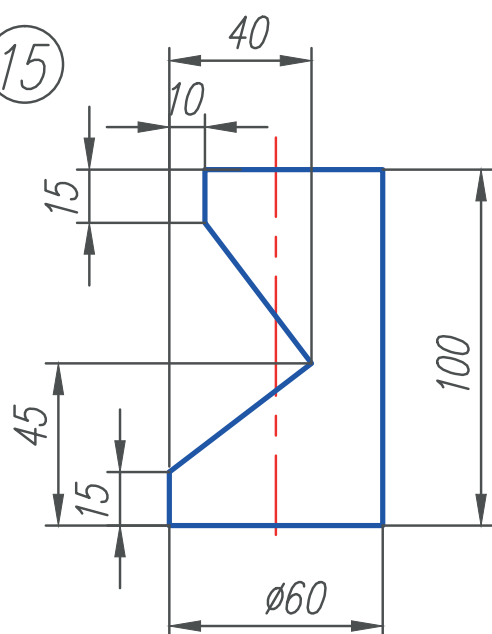
13



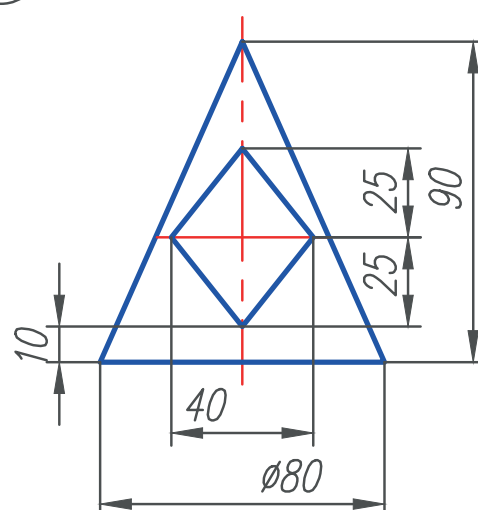
14

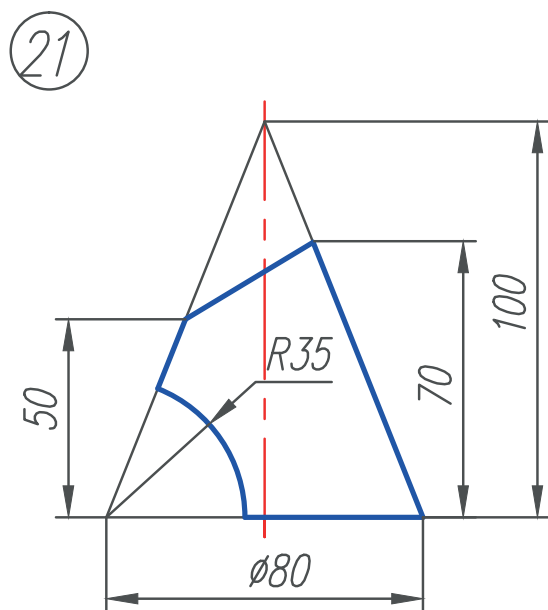
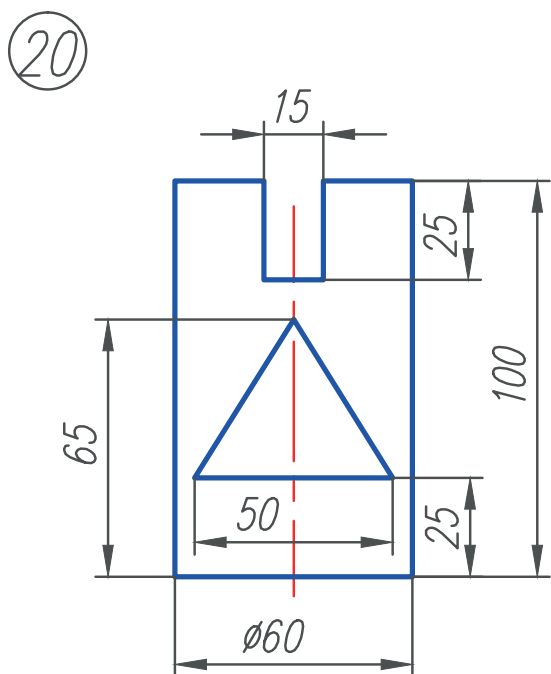
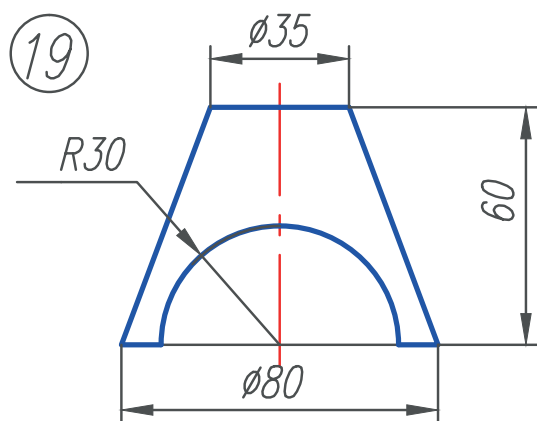
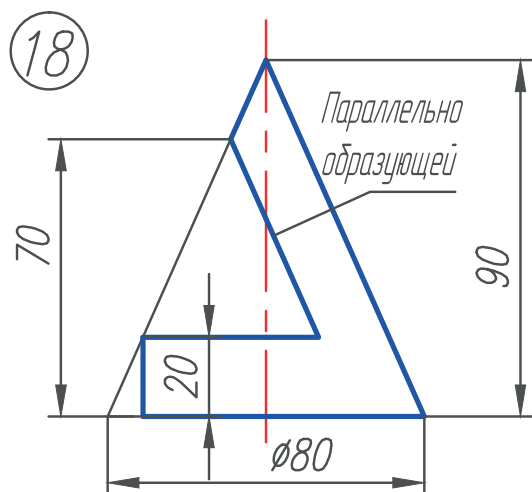
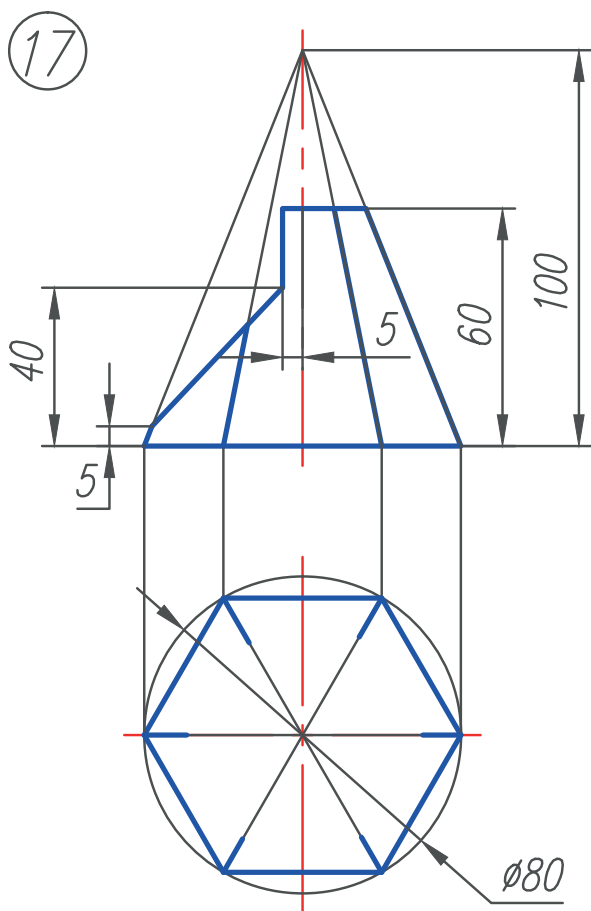


15

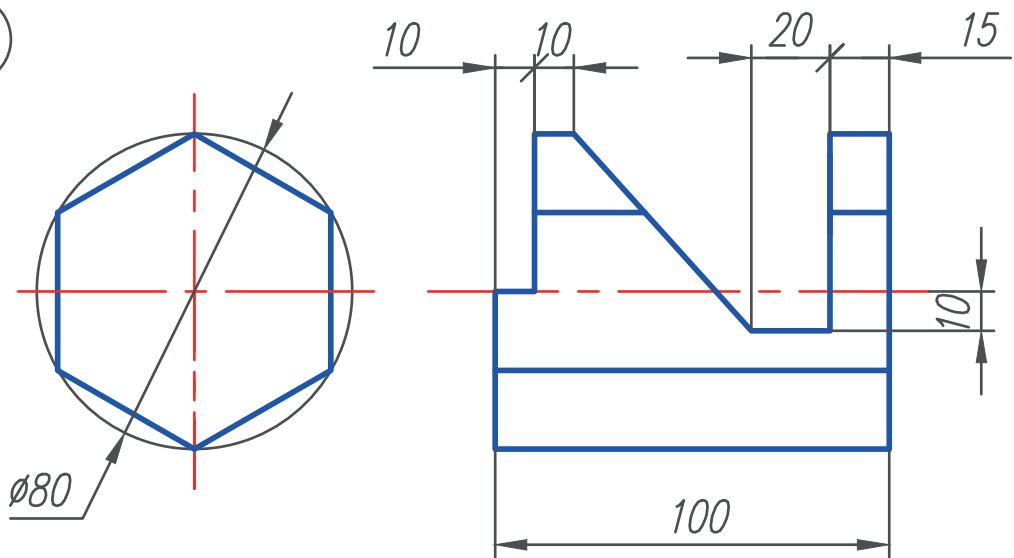


16

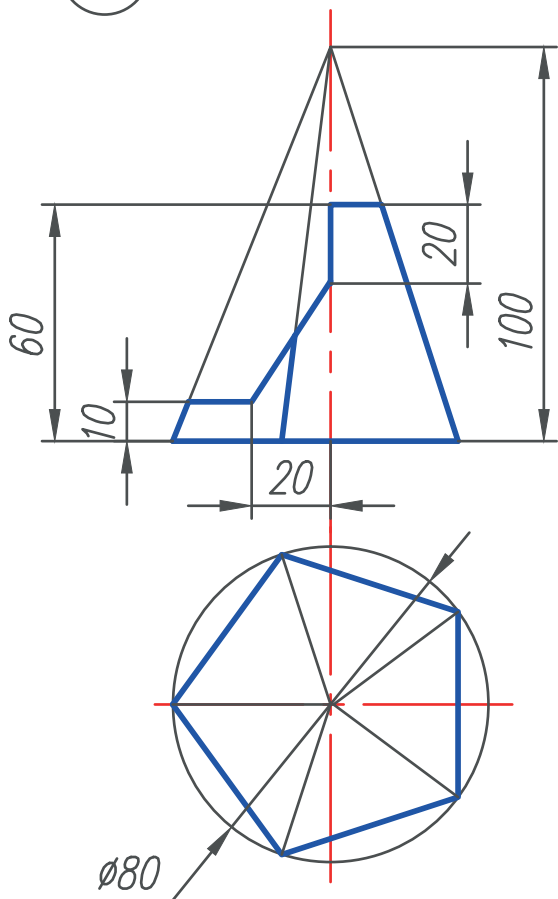




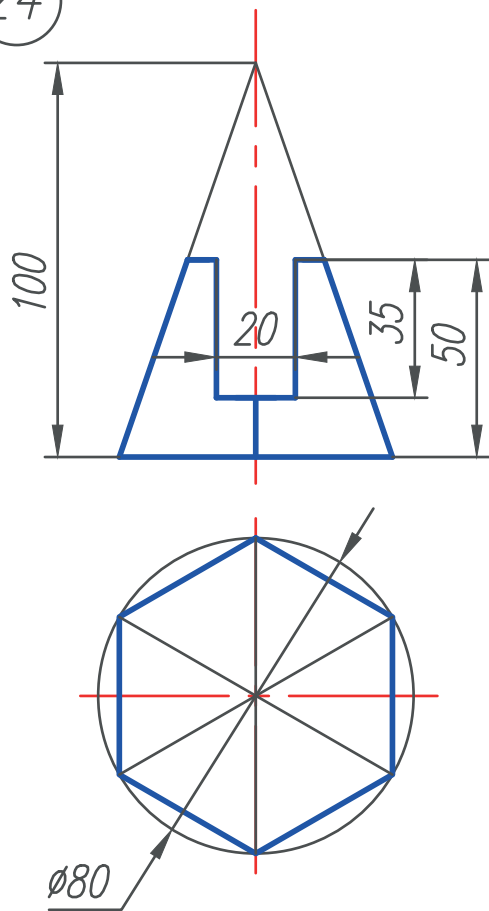
22



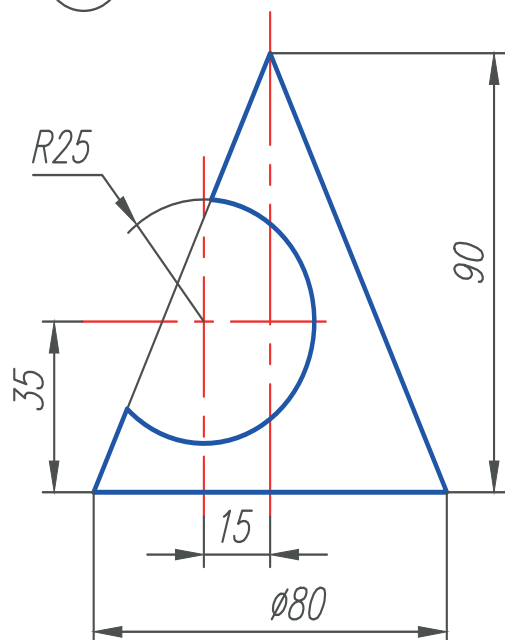
23



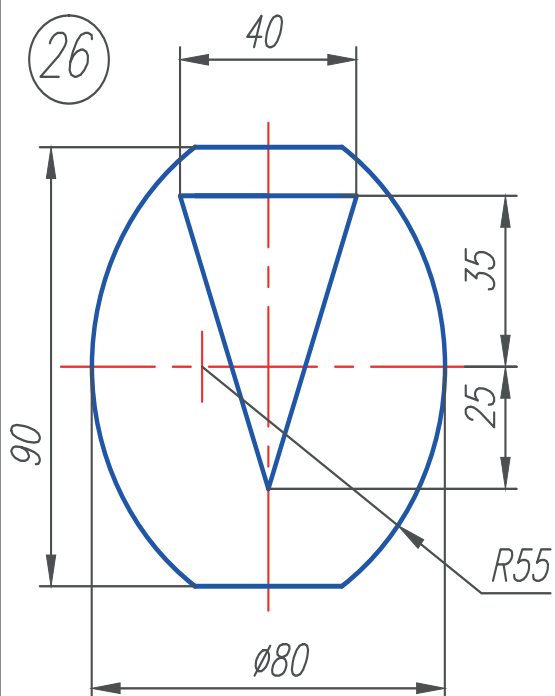
24



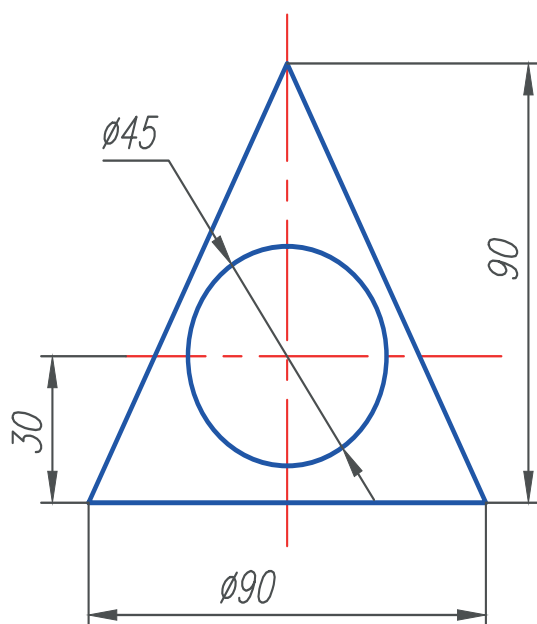
(25)



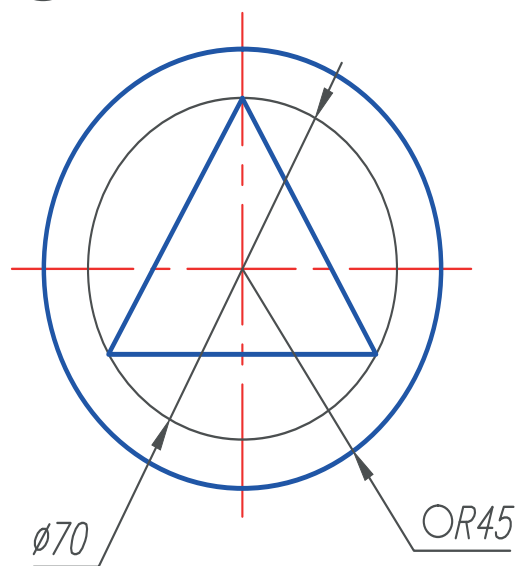
(26)



(27)



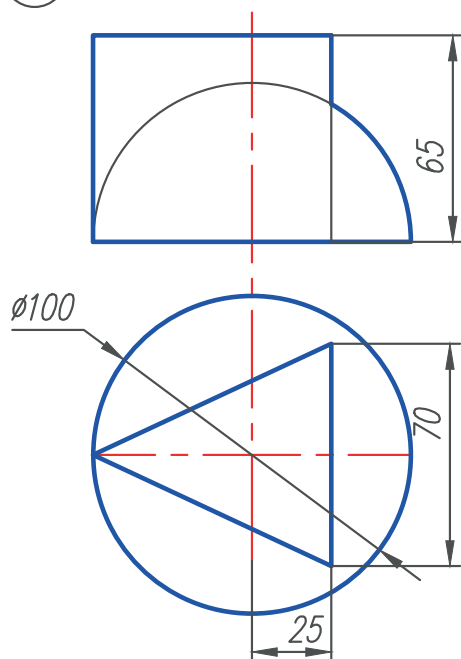
(28)



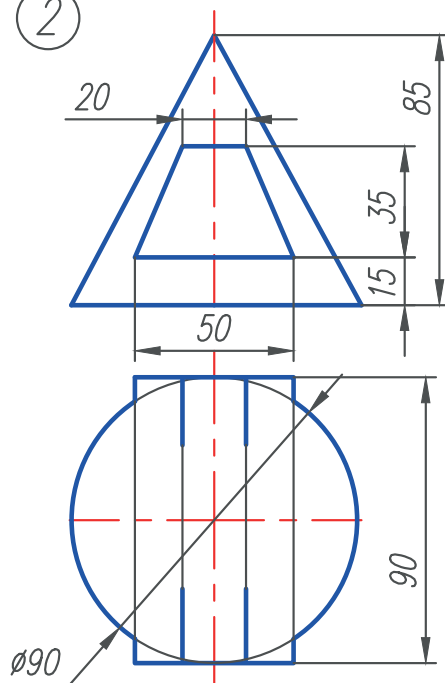
# ПРИЛОЖЕНИЕ 3

## Индивидуальные задания к листу 2 «Пересечение поверхности вращения с многогранником»

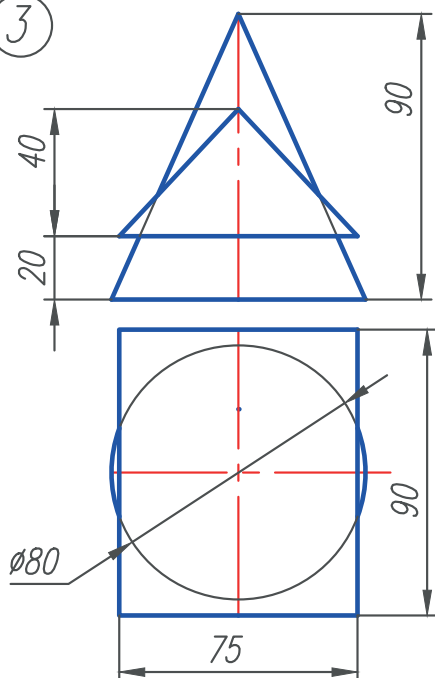
1



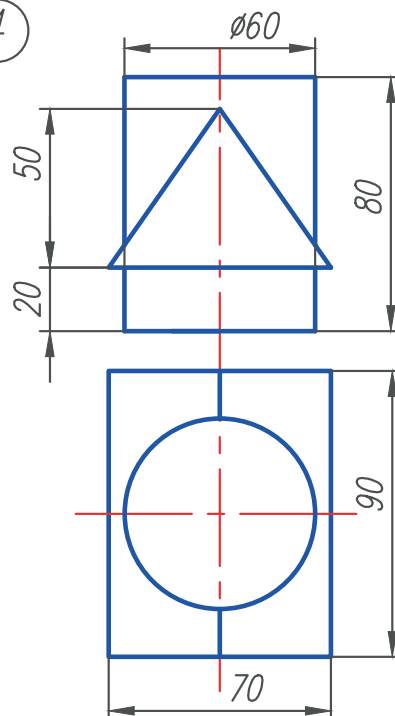
2



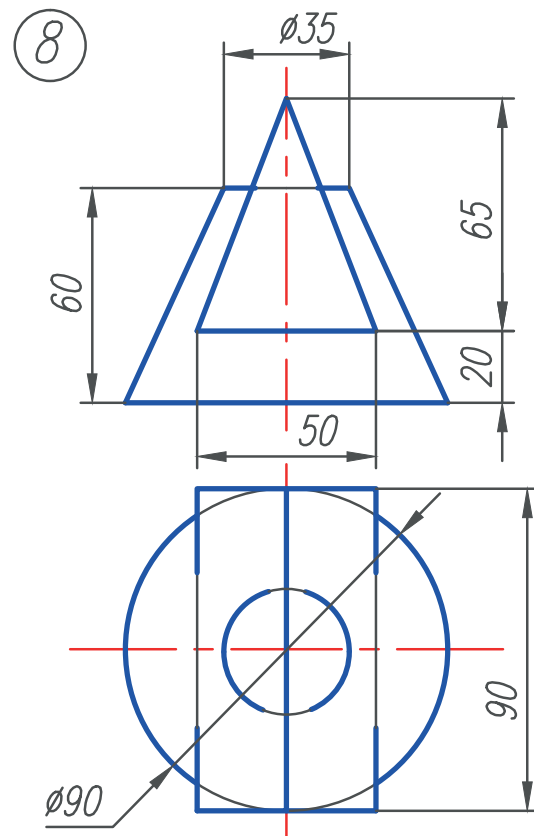
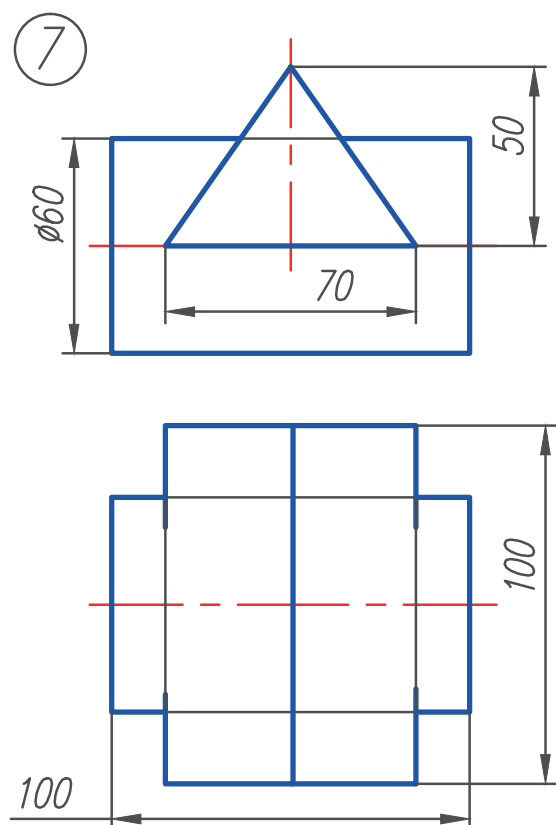
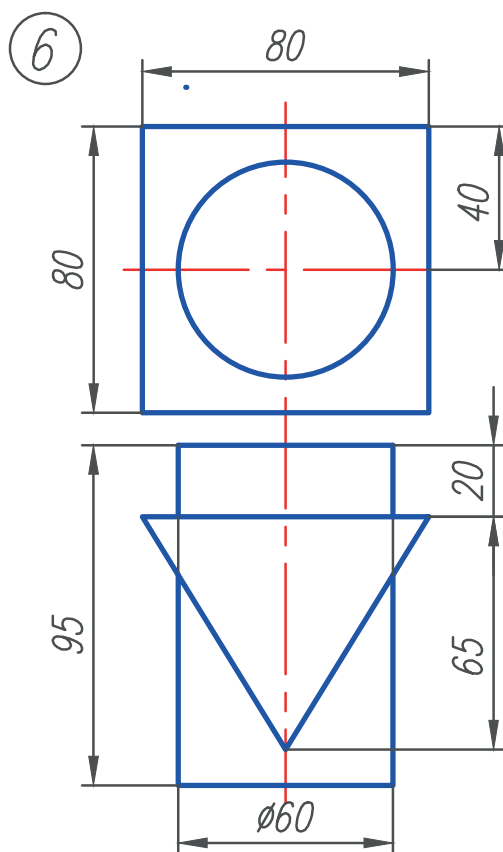
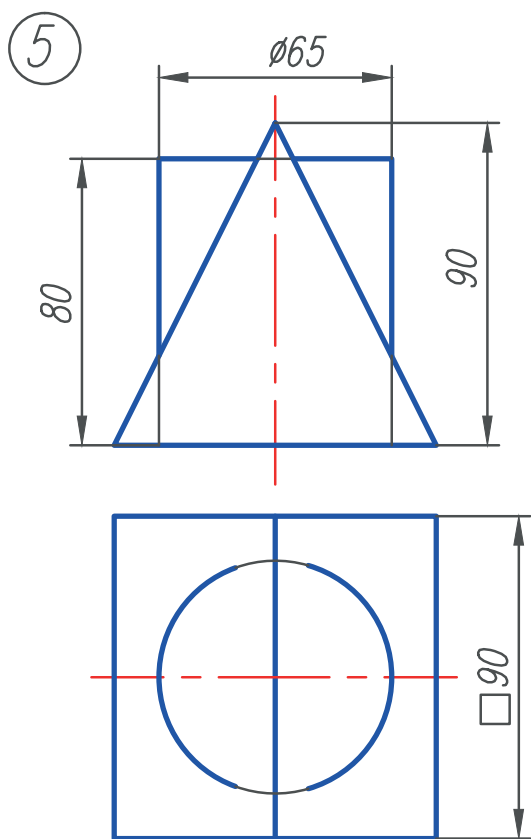
3



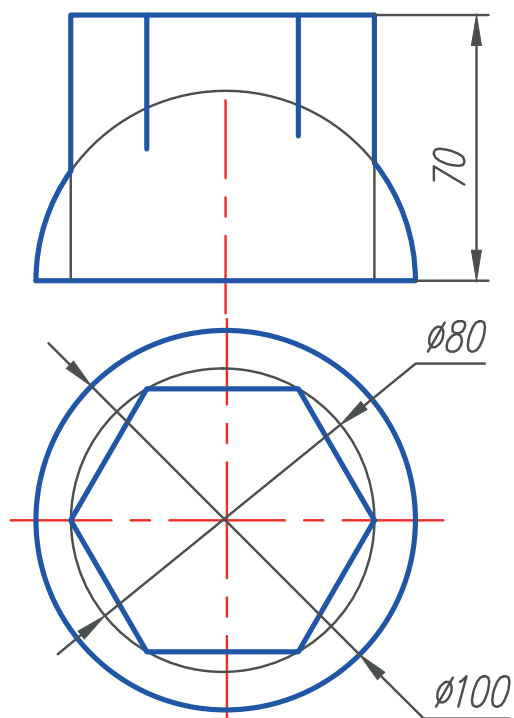
4



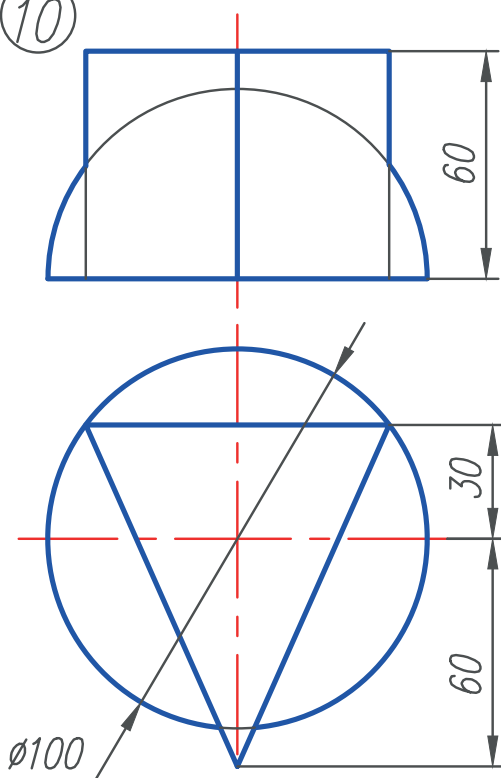




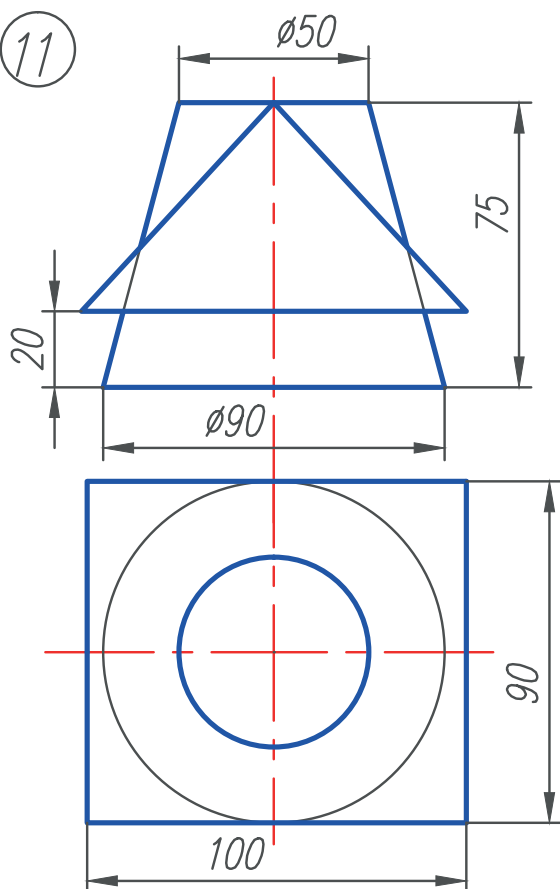
9



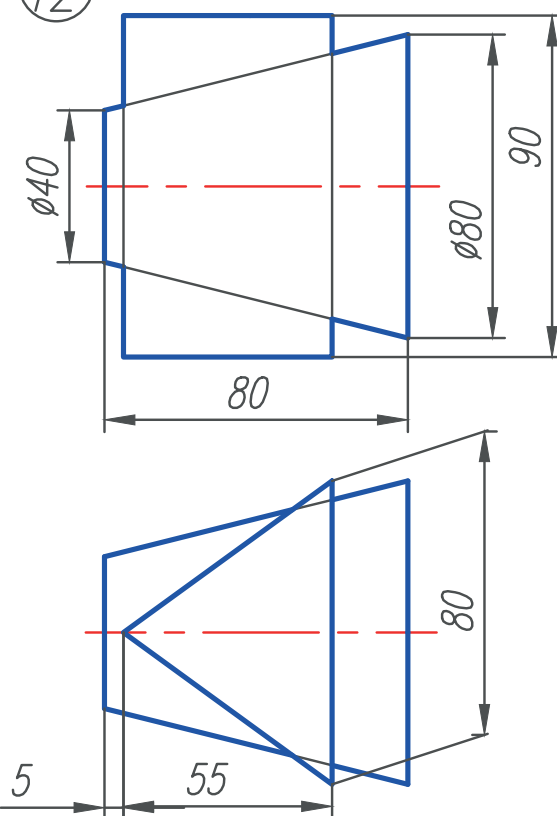
10



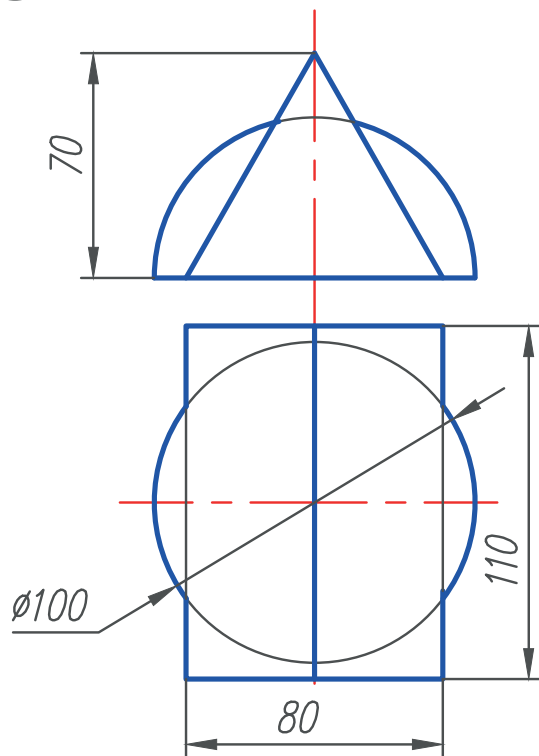
11



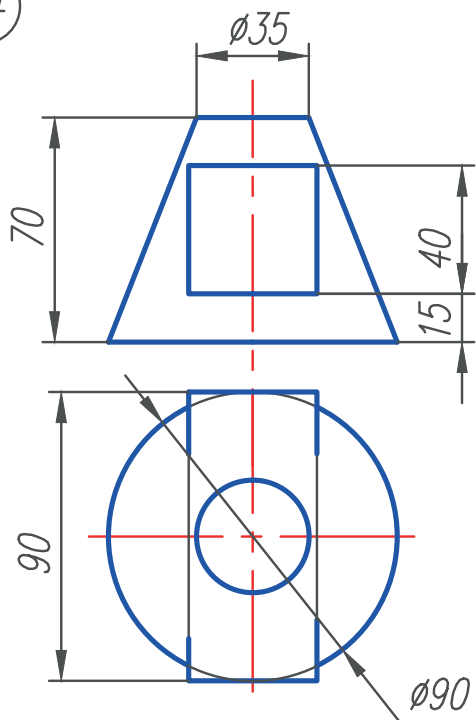
12



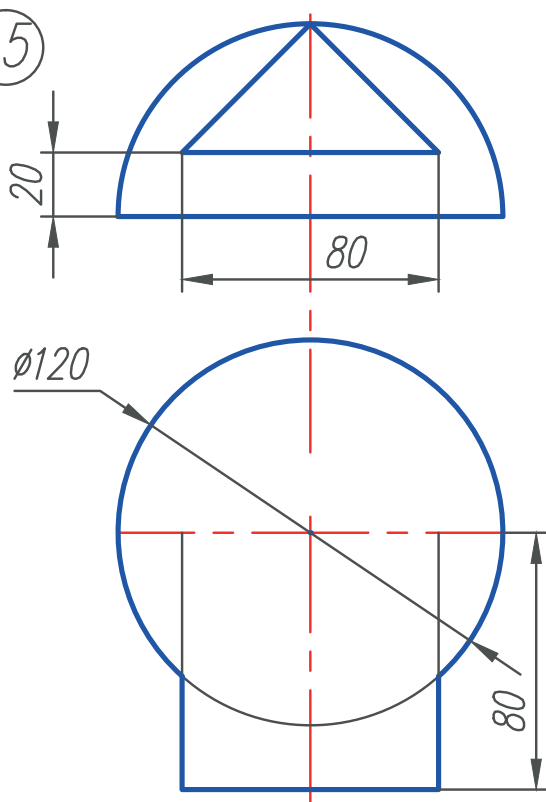
13



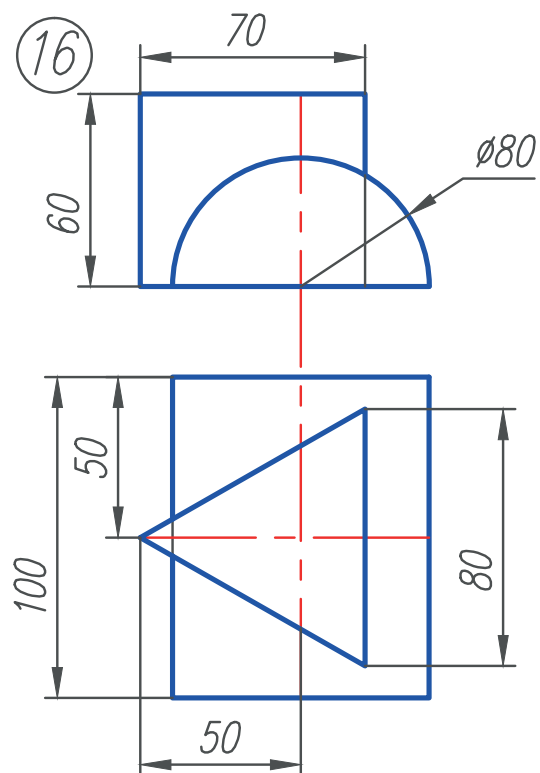
14

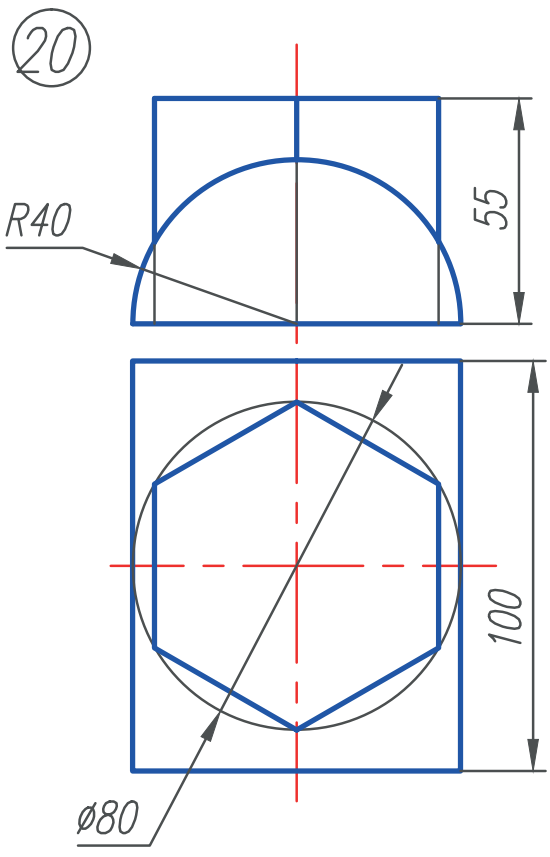
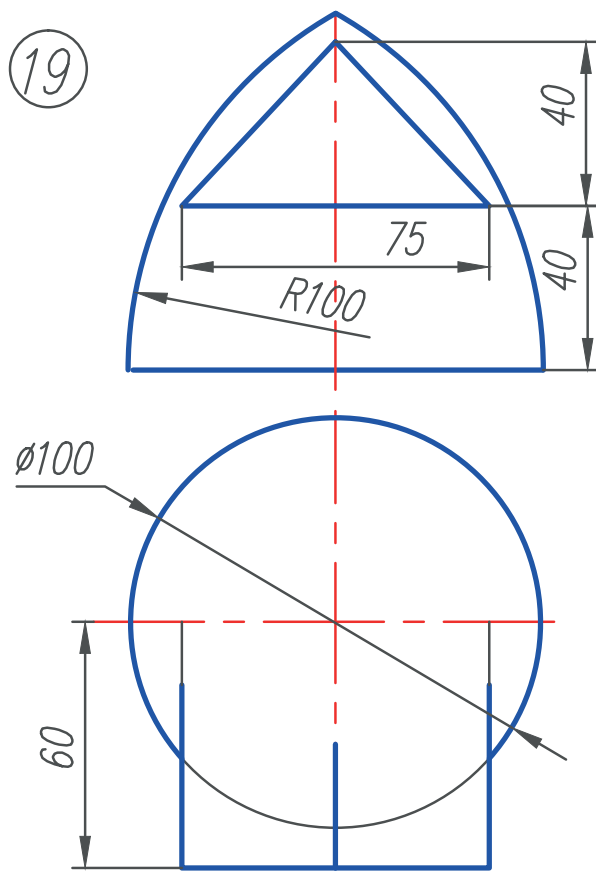
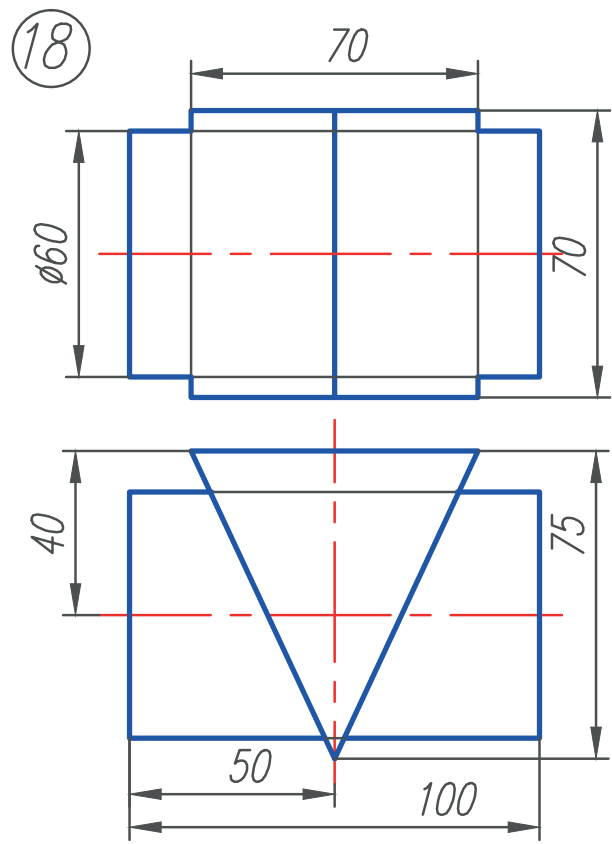
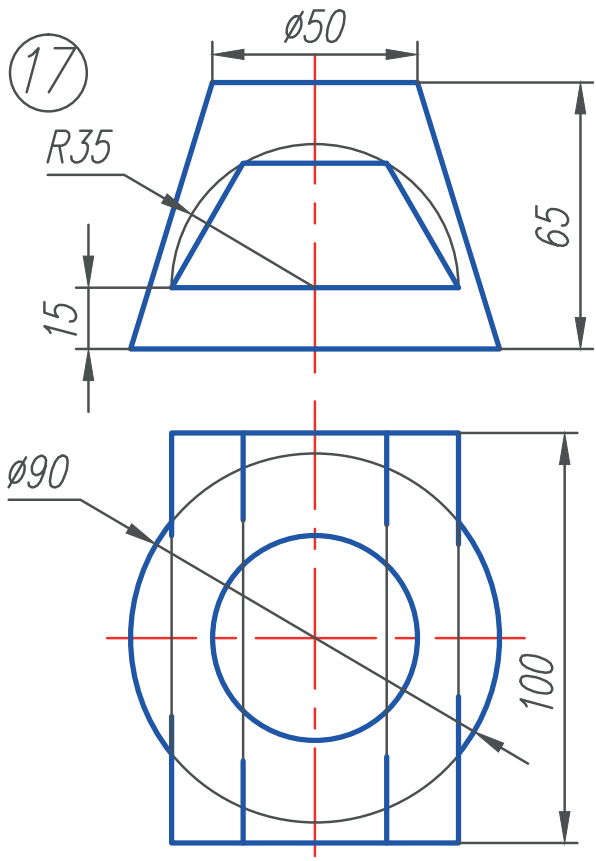


15

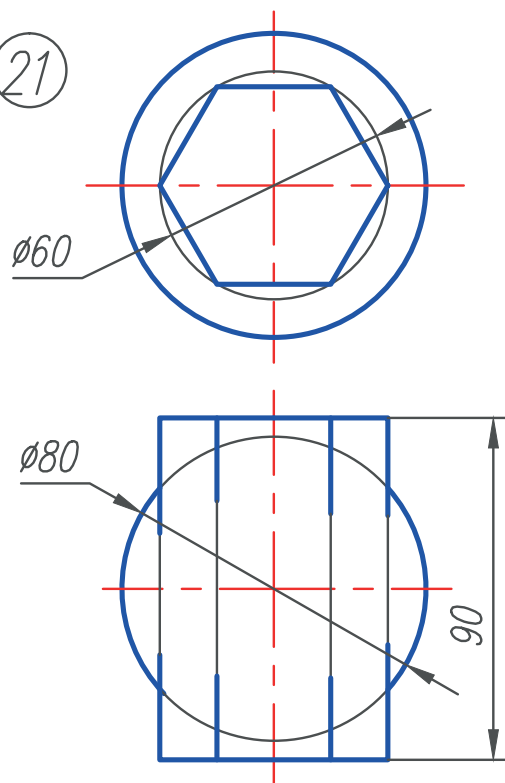


16

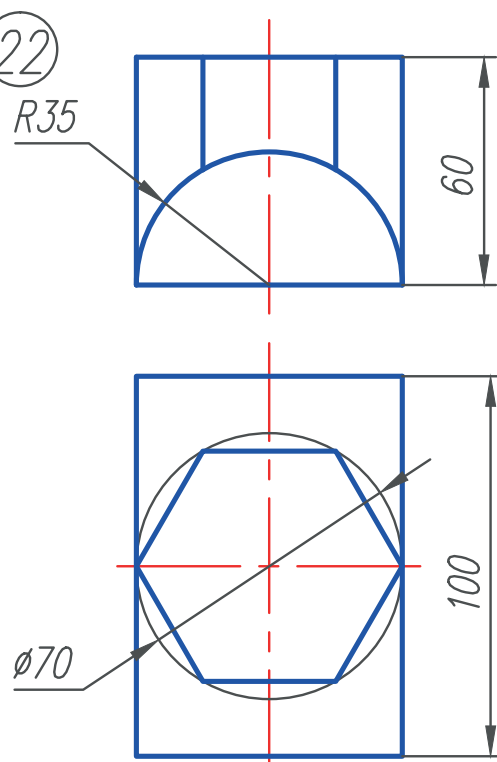




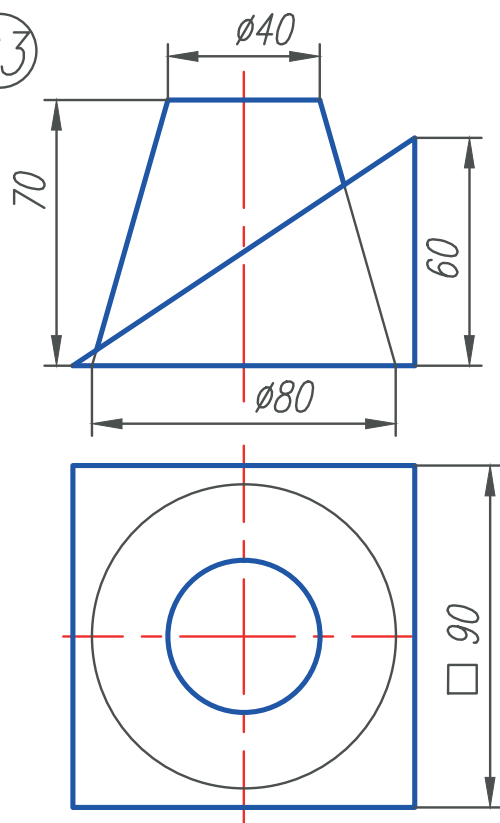
21



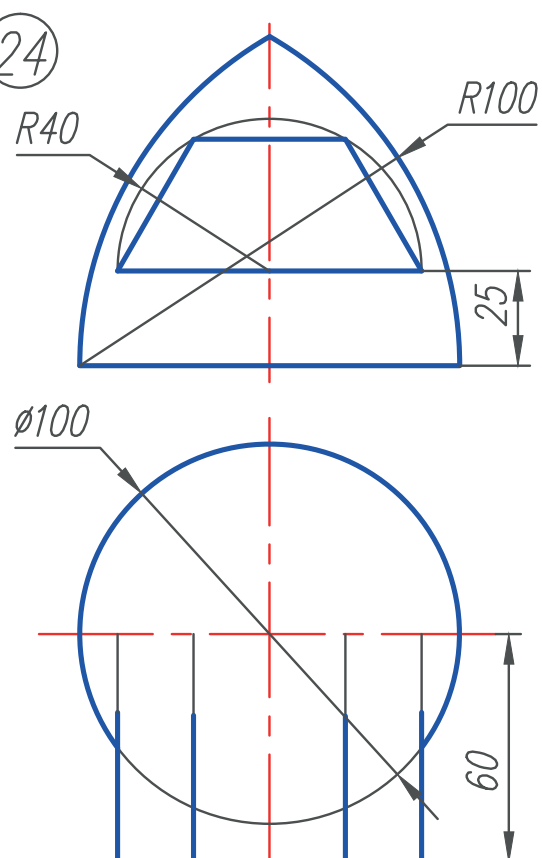
22

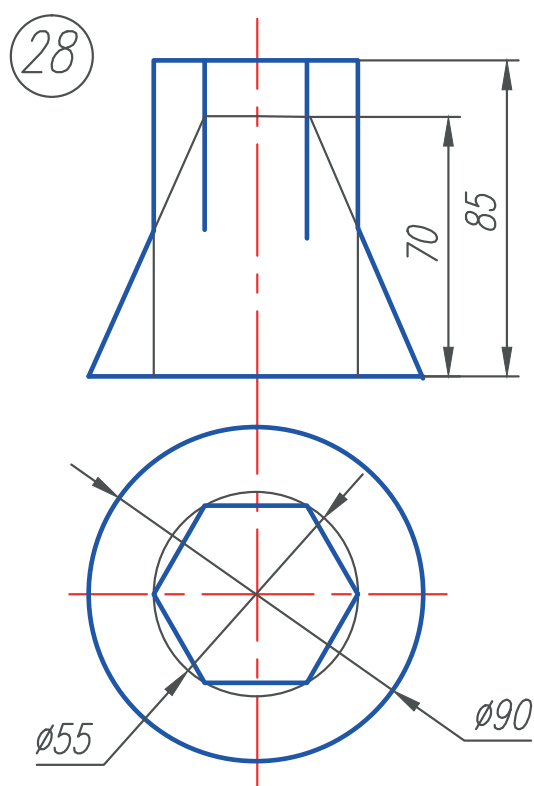
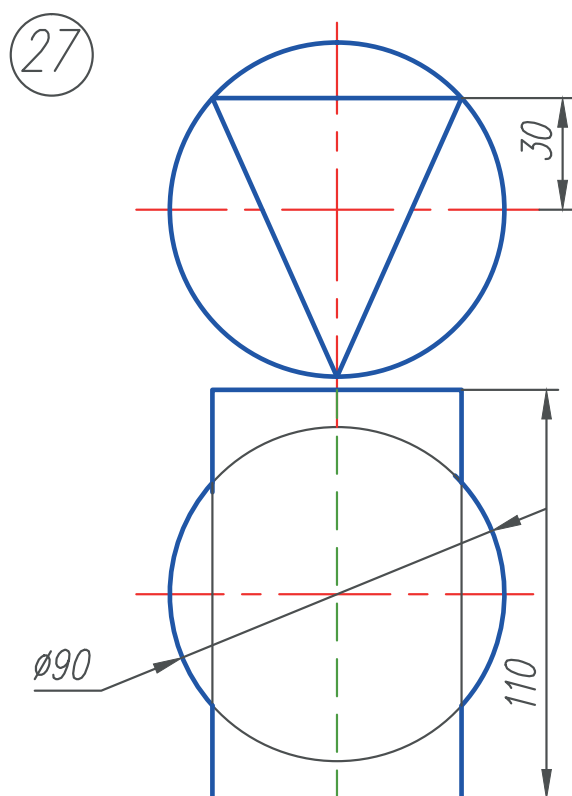
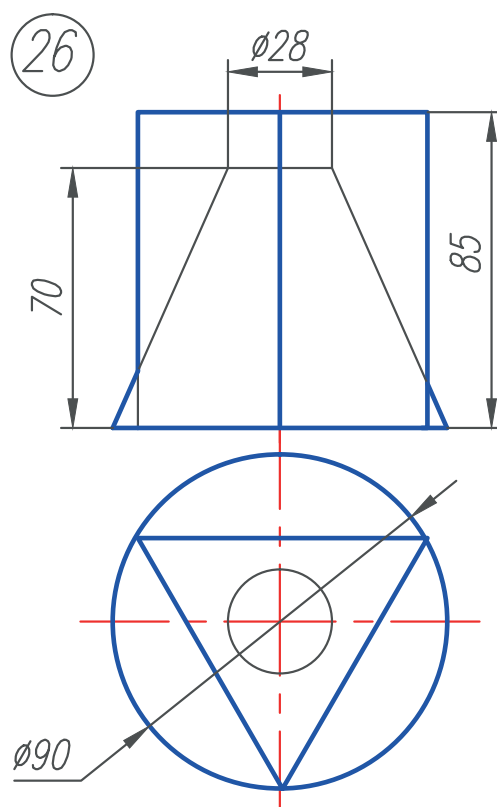
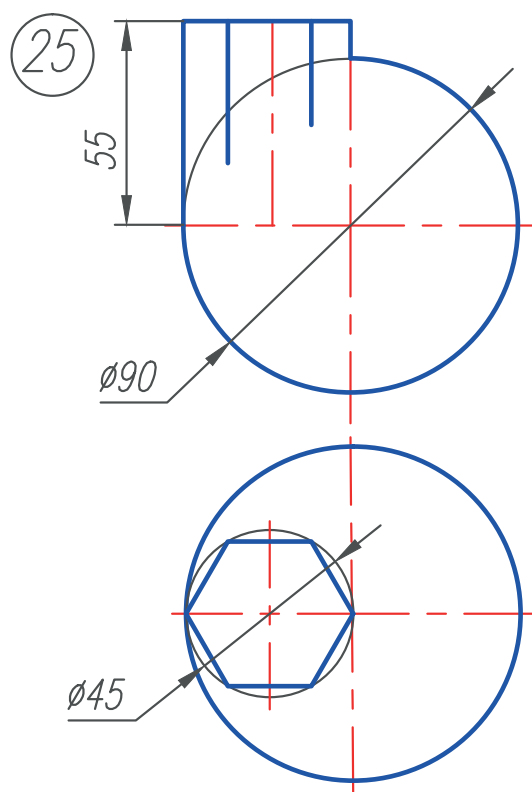


23



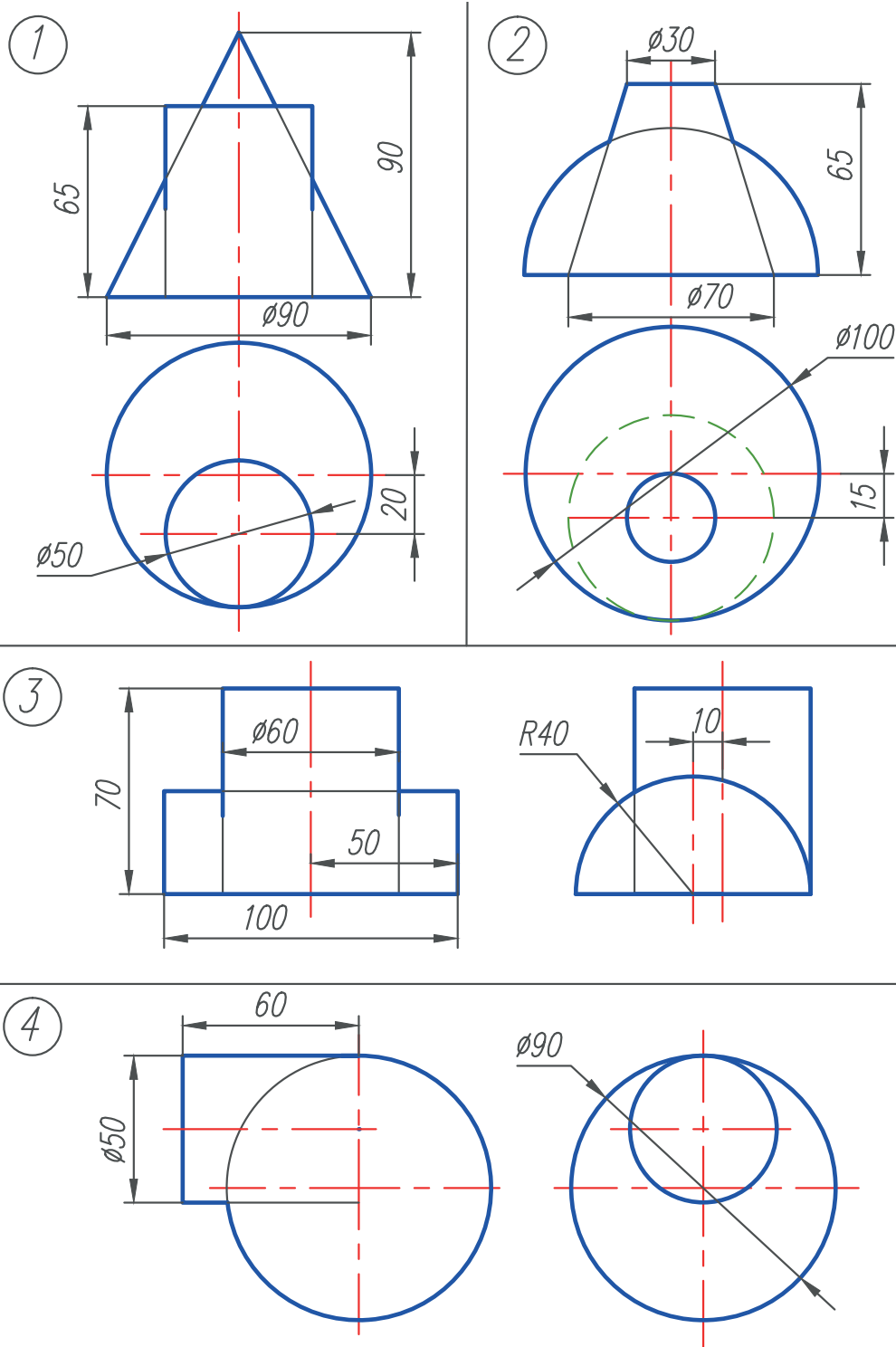
24



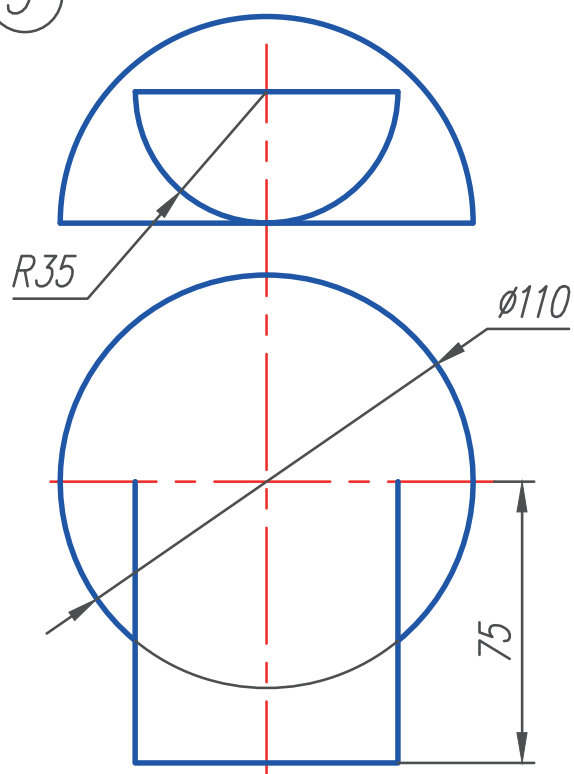


## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

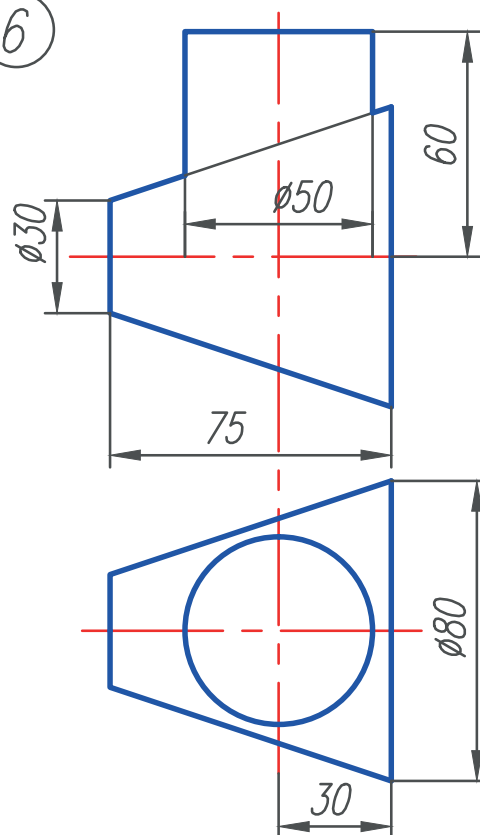
Индивидуальные задания к листу 3 «Пересечение двух поверхностей вращения (способ вспомогательных секущих плоскостей)»



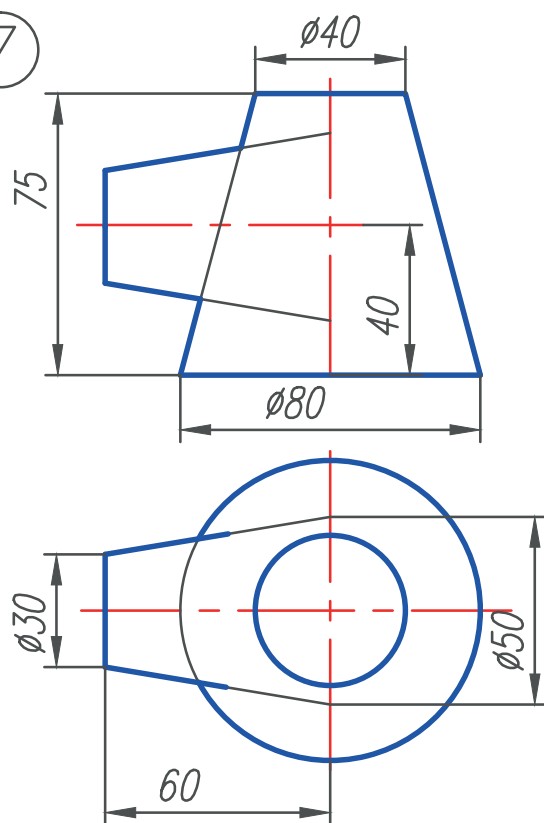
5



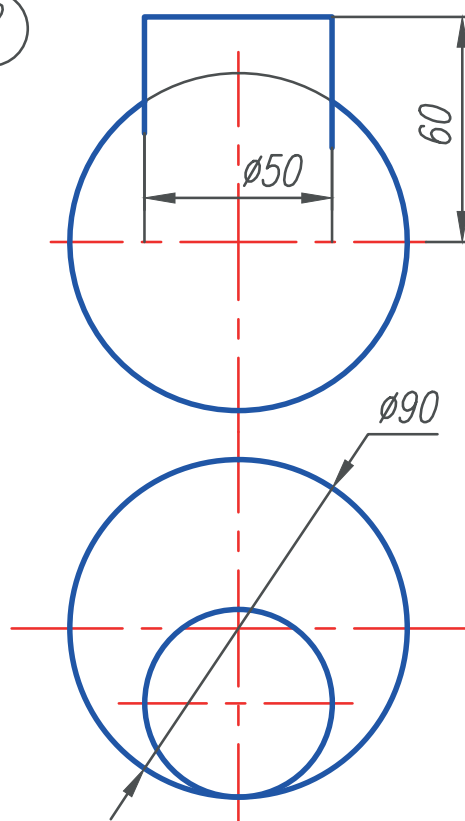
6



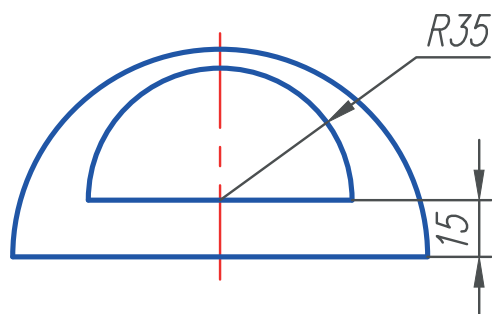
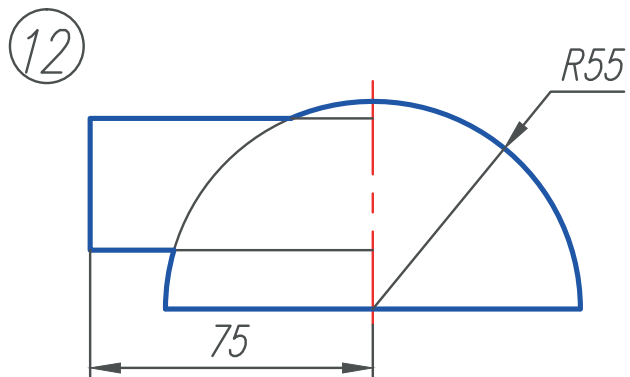
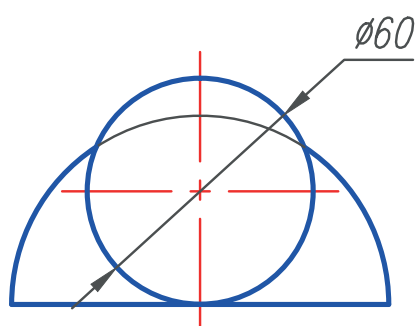
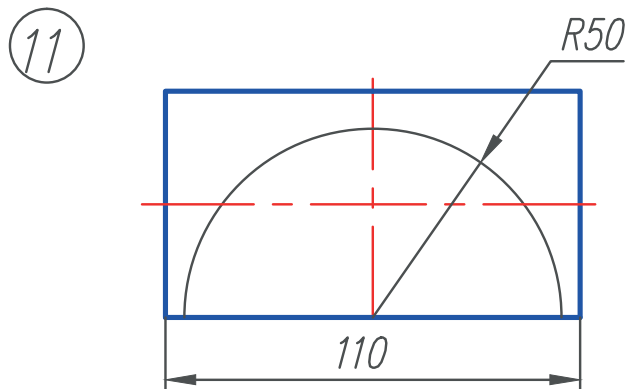
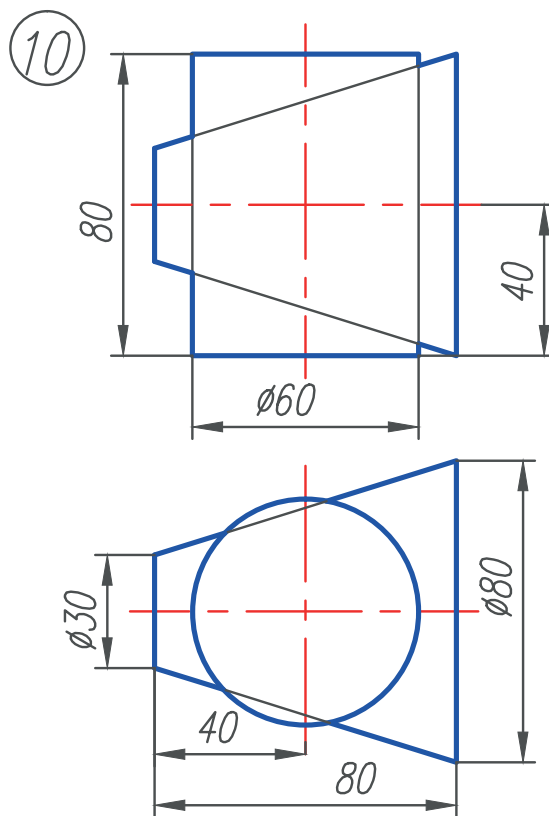
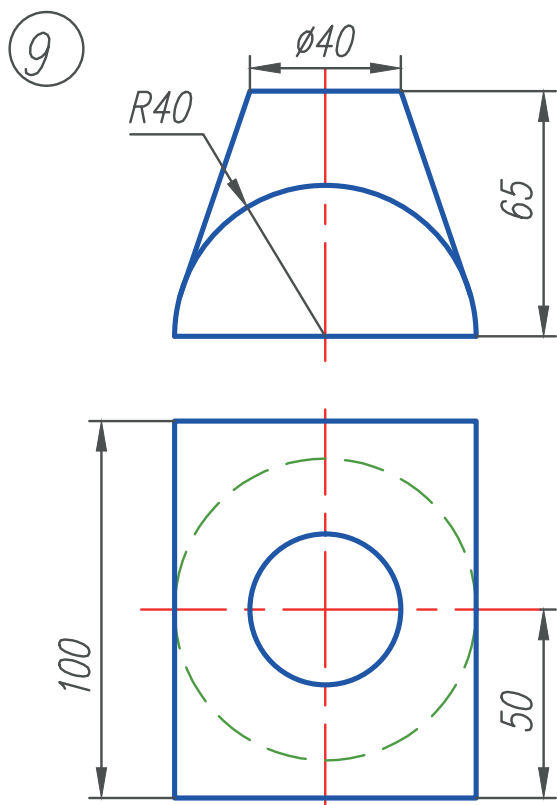
7



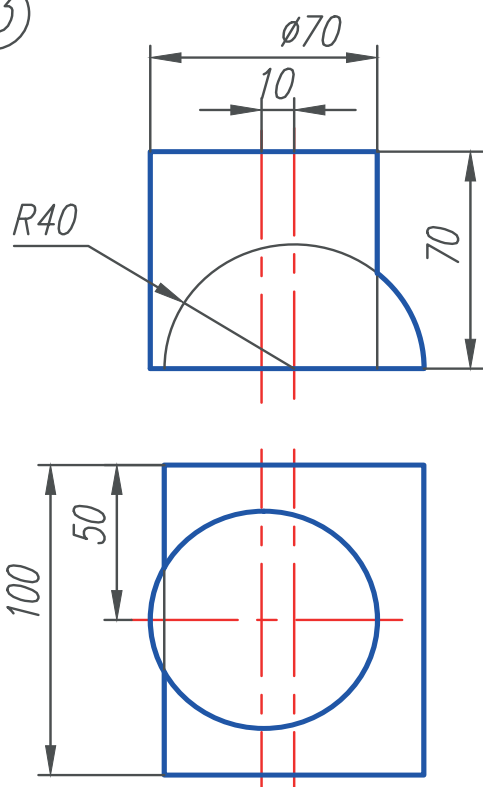
8



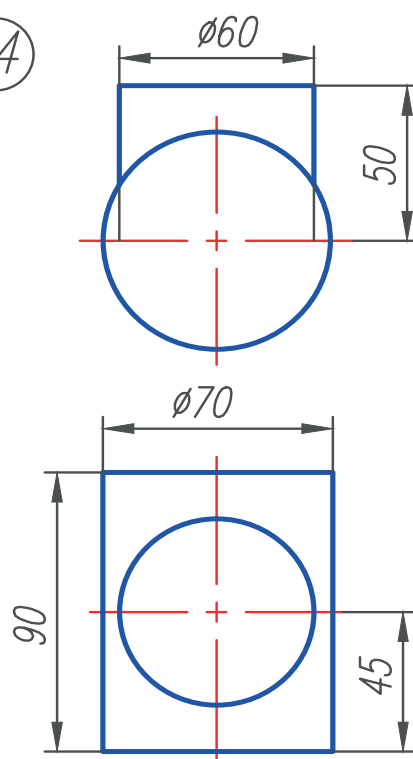




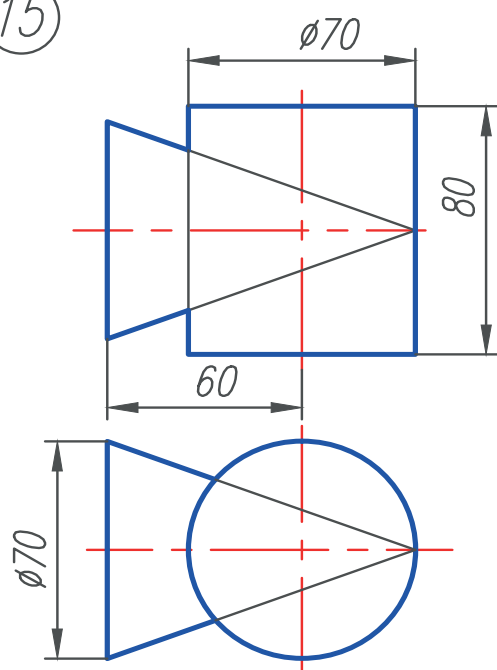
13



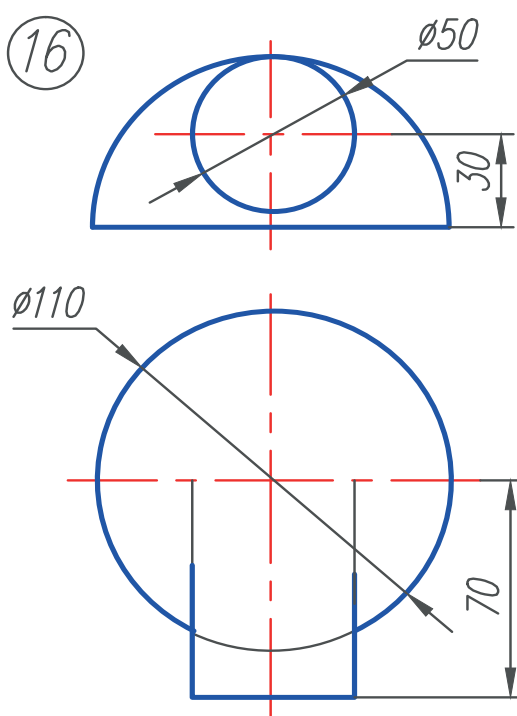
14

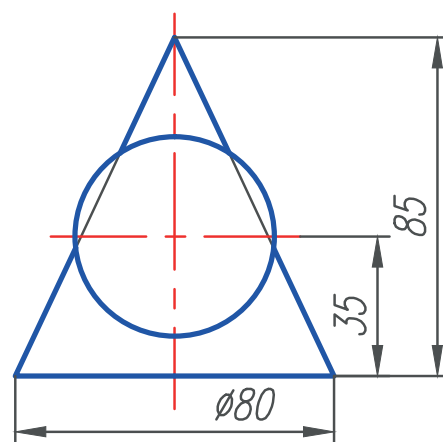
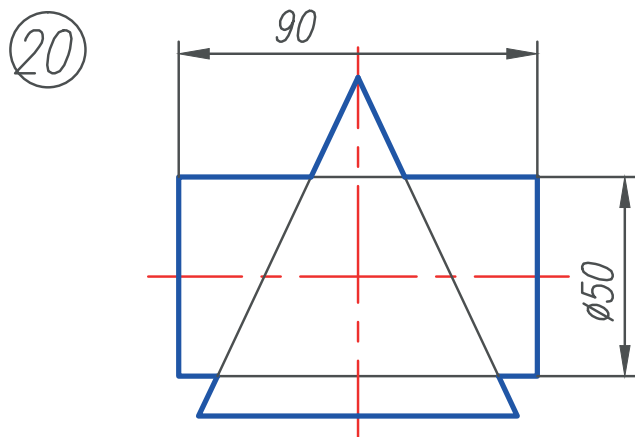
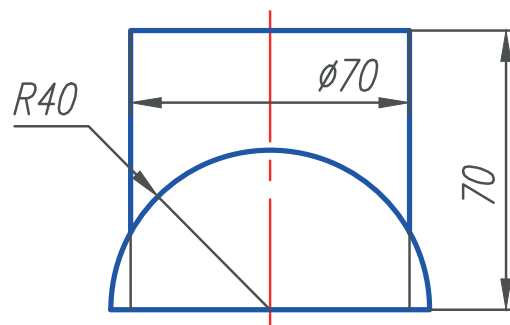
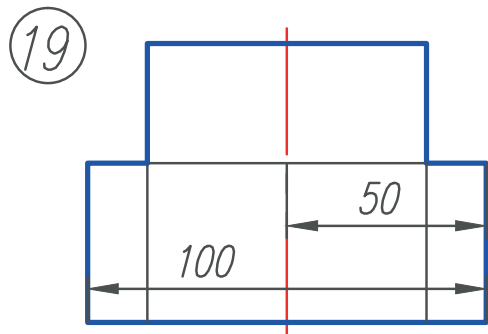
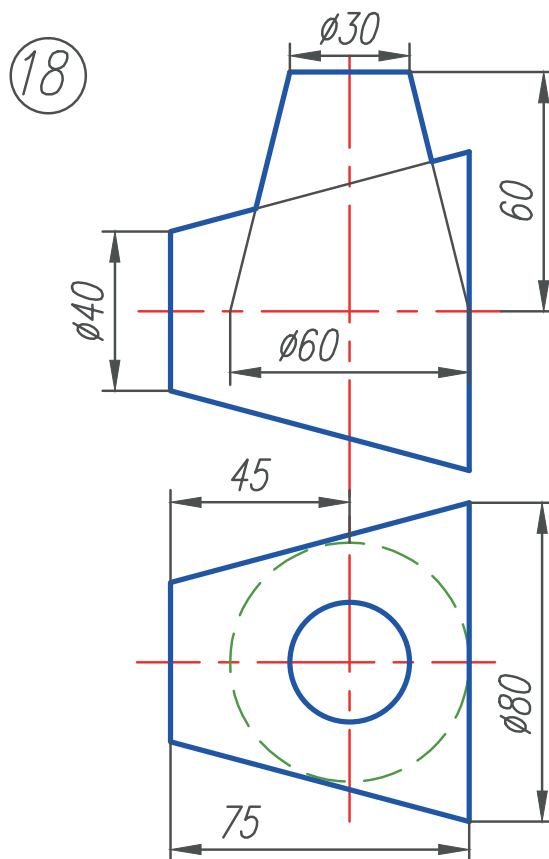
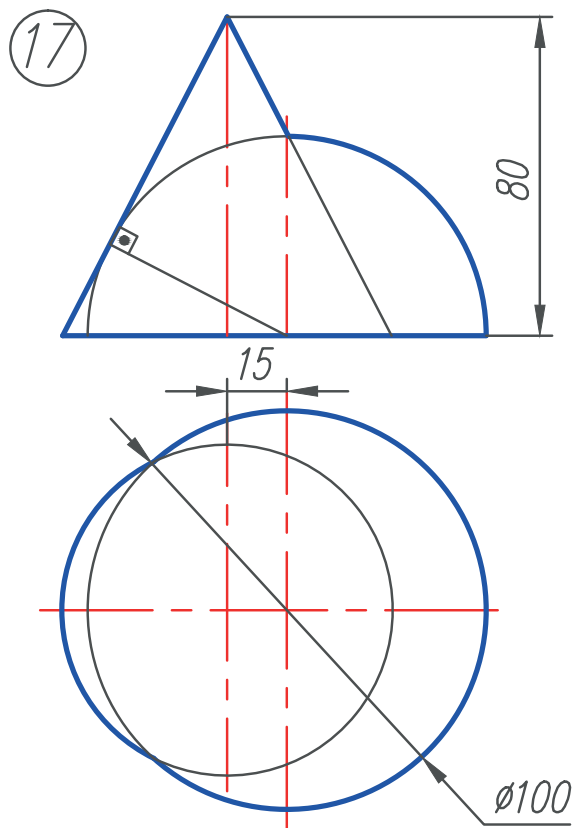


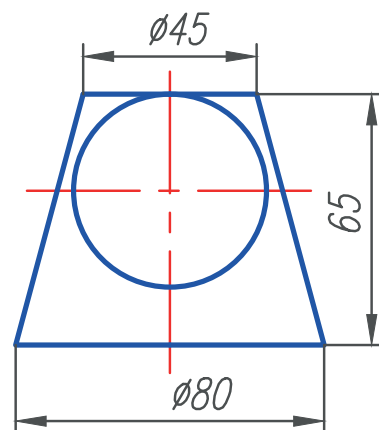
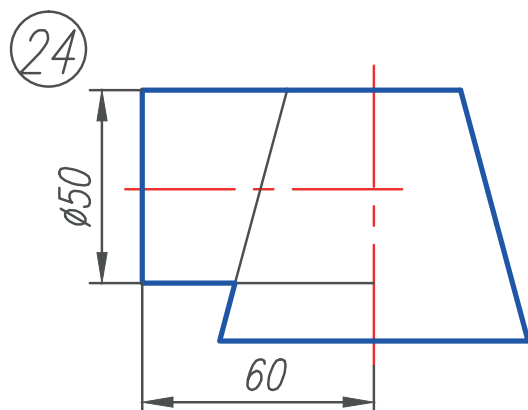
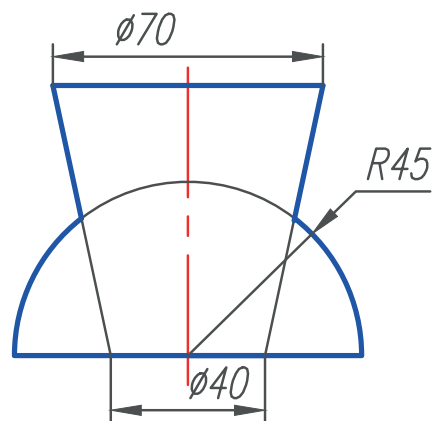
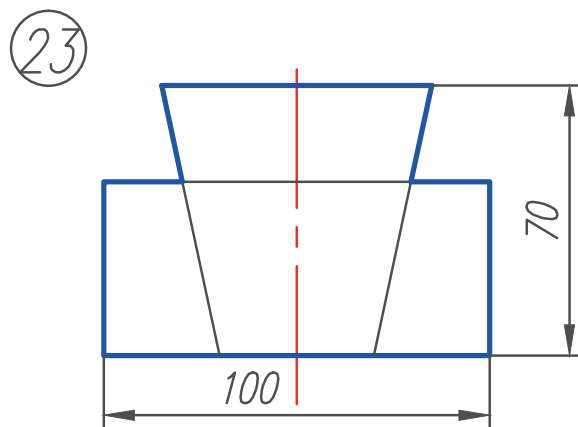
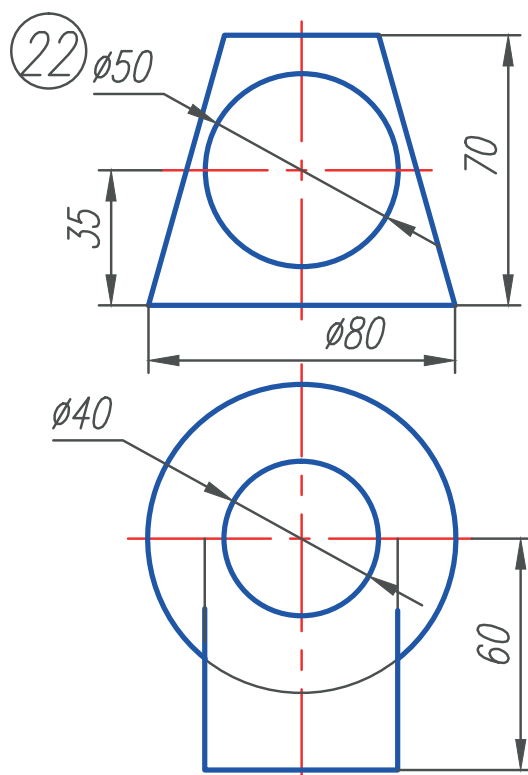
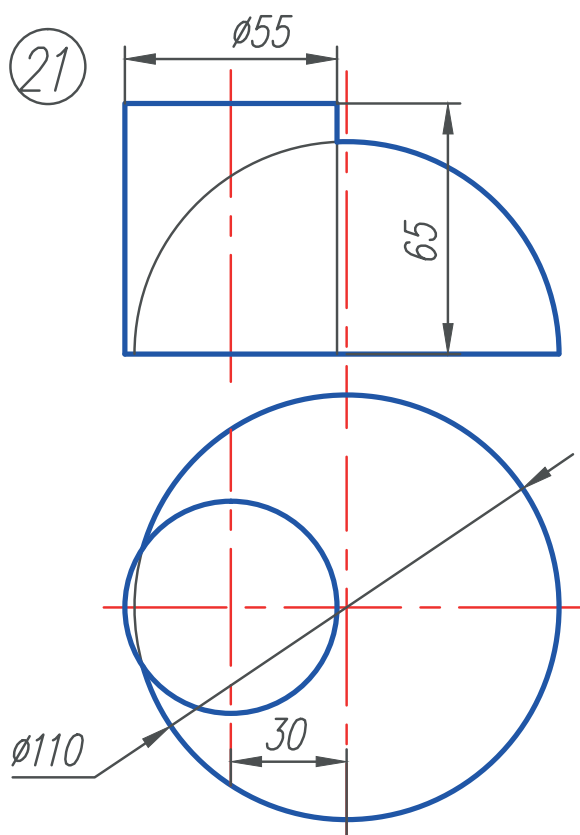
15

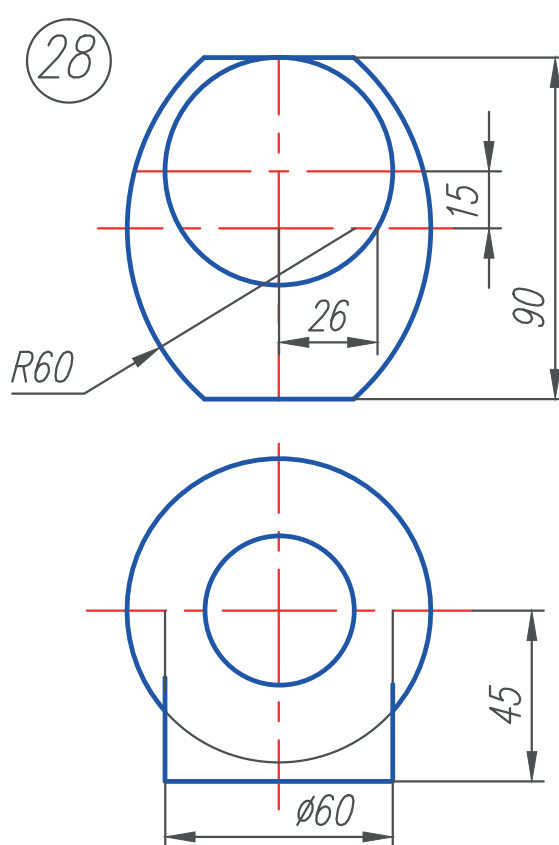
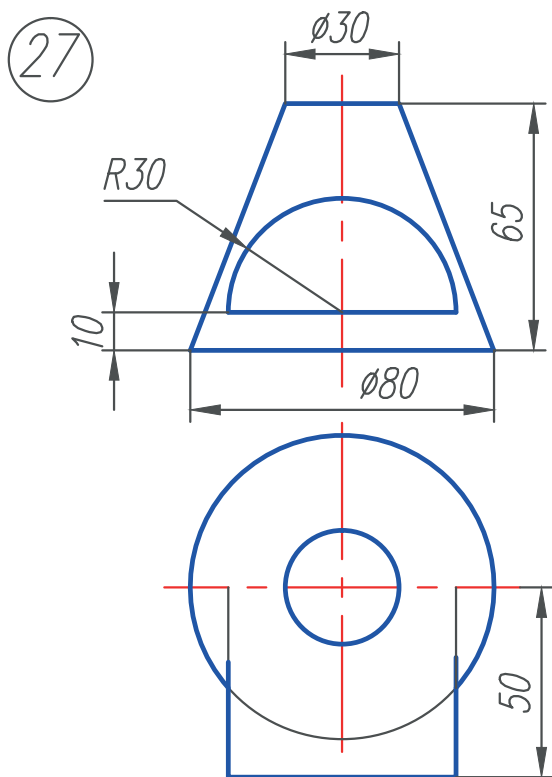
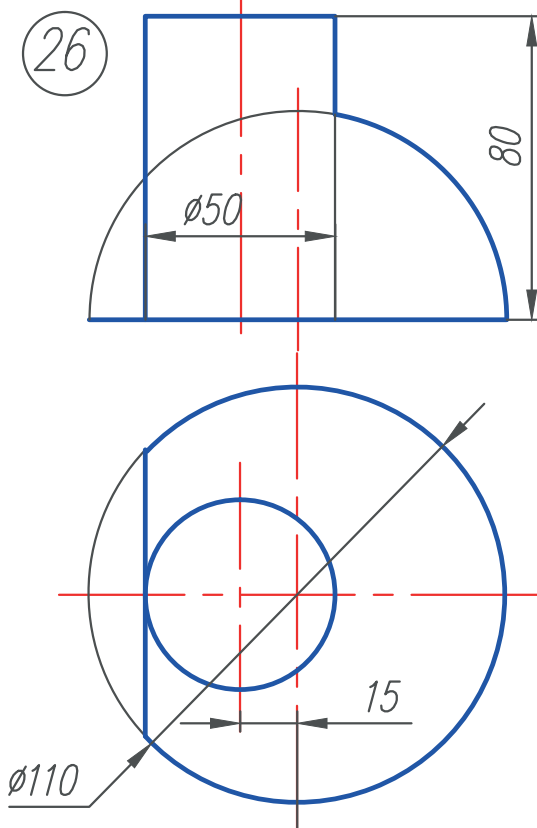
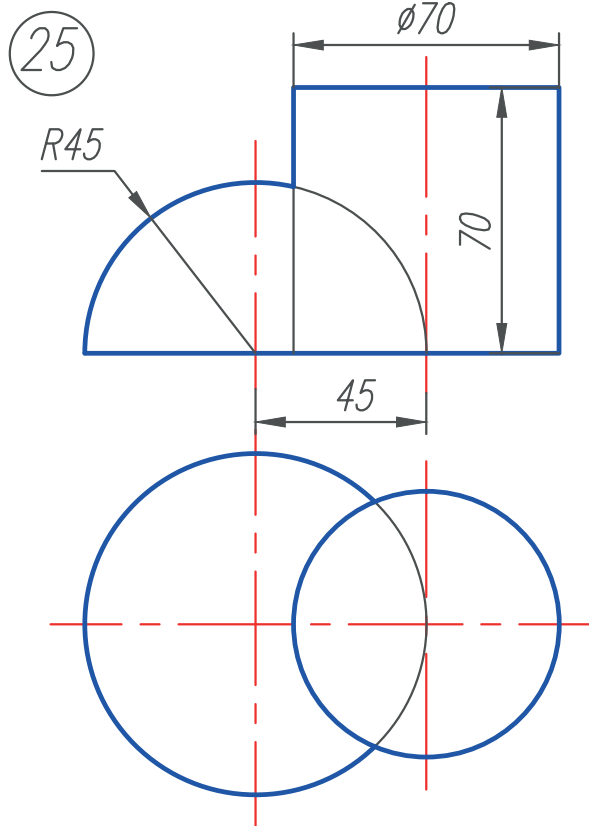


16



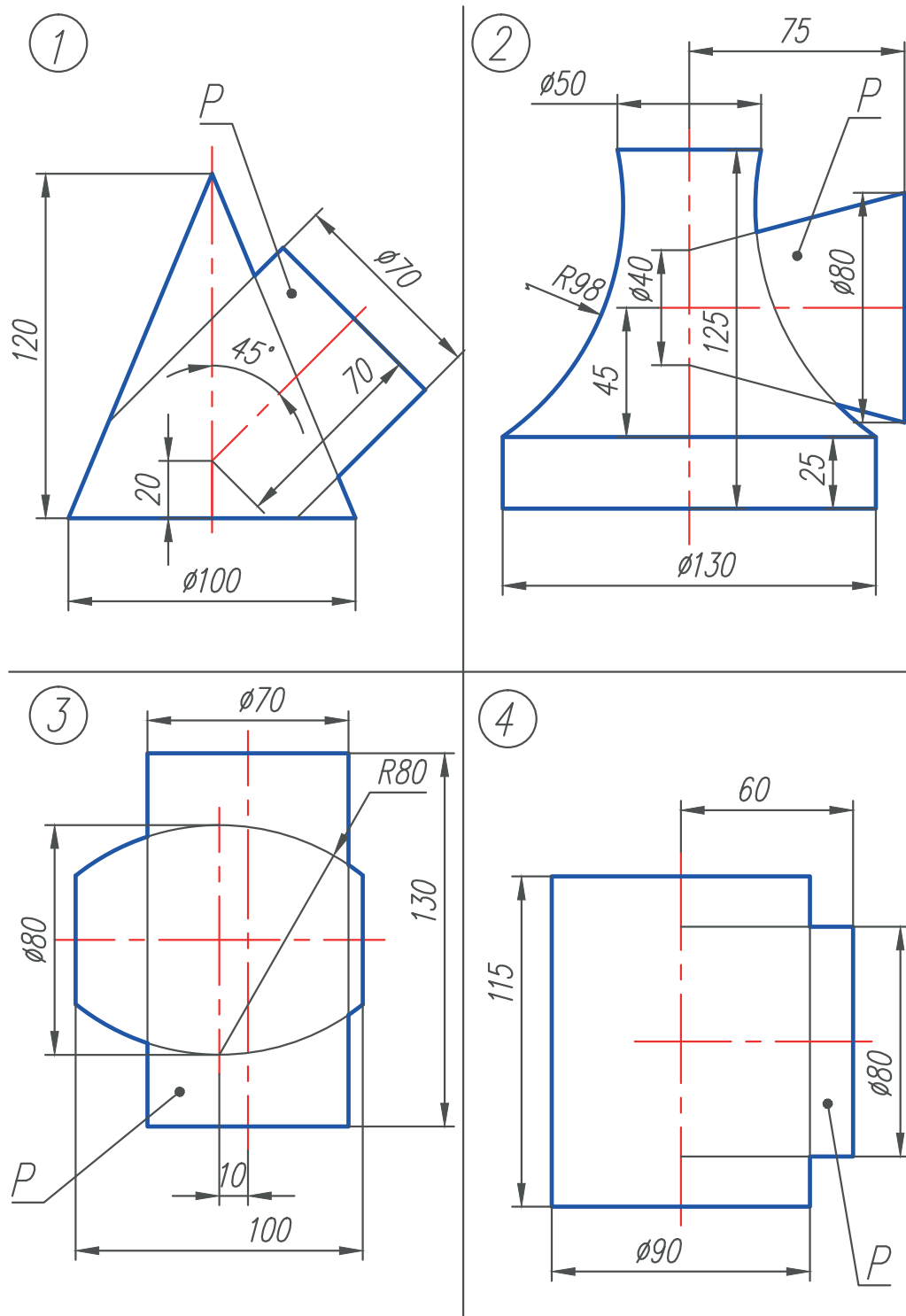


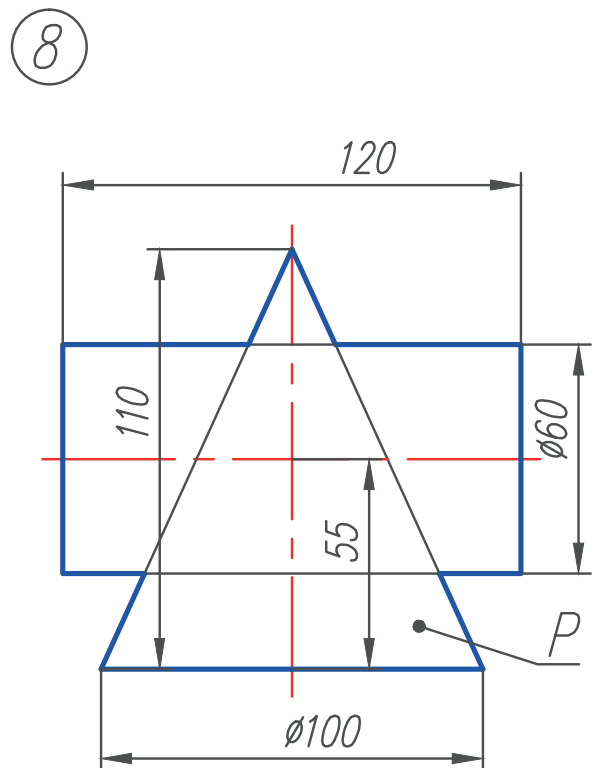
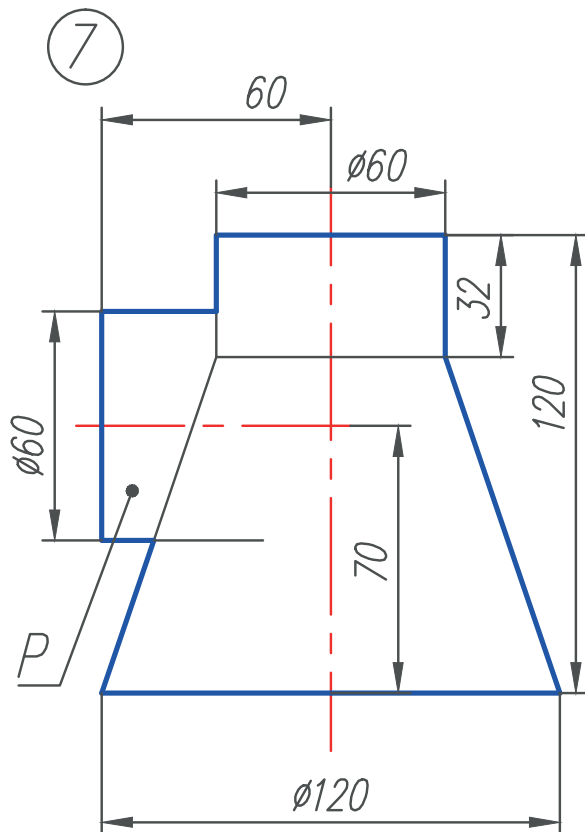
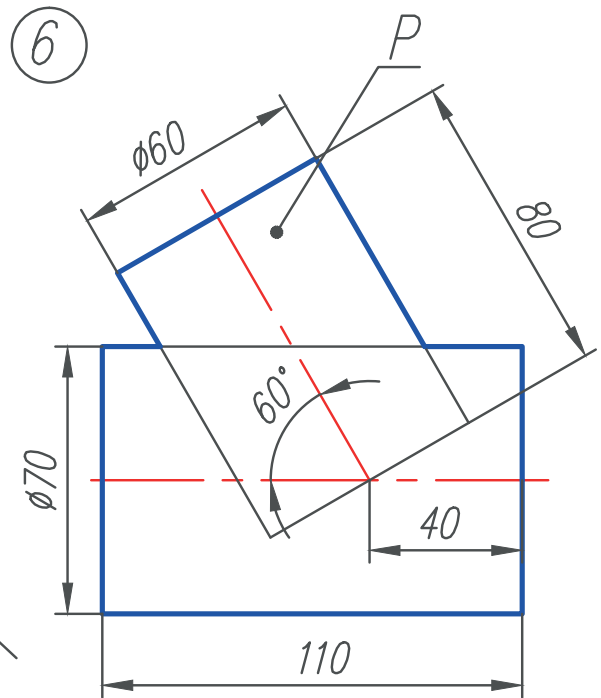
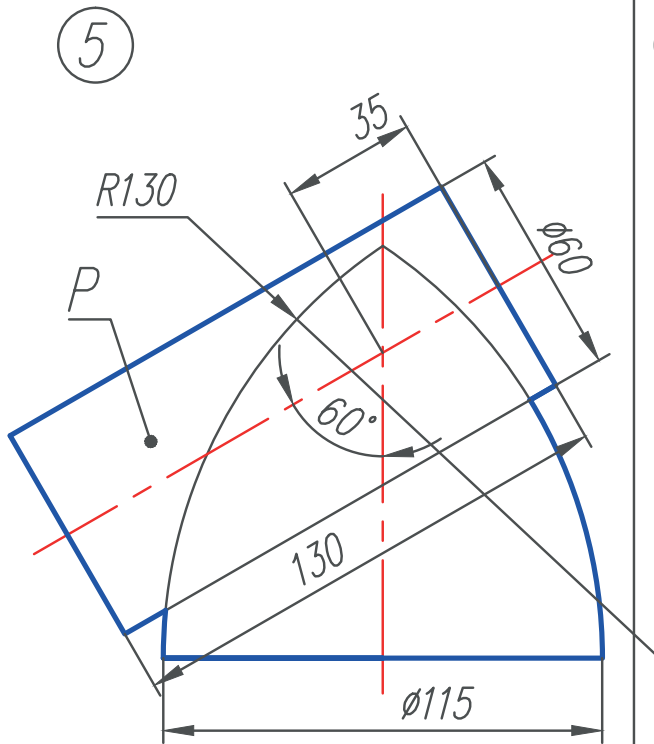




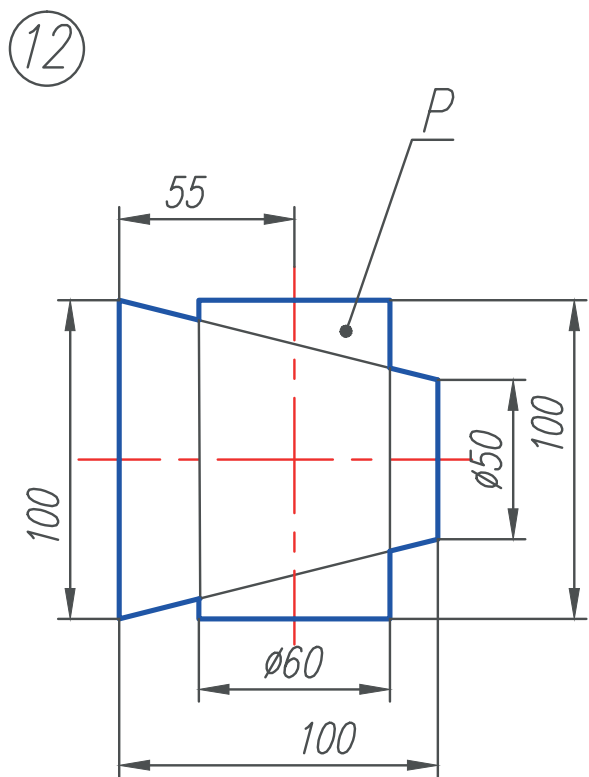
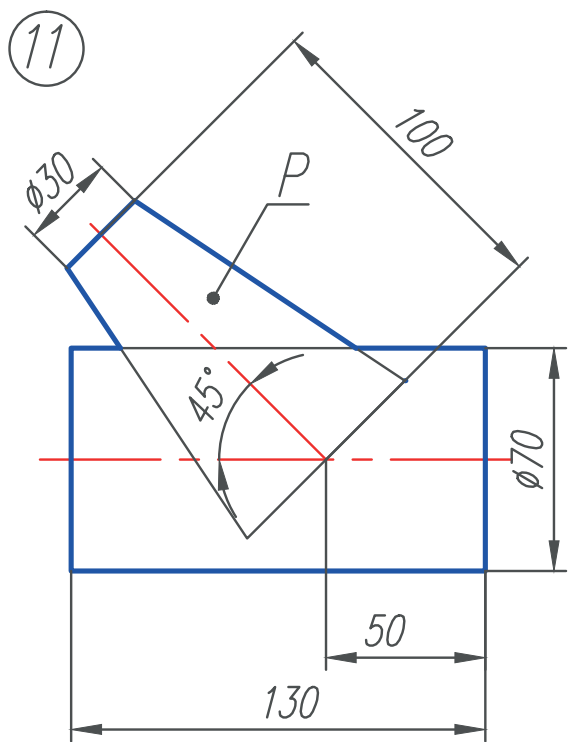
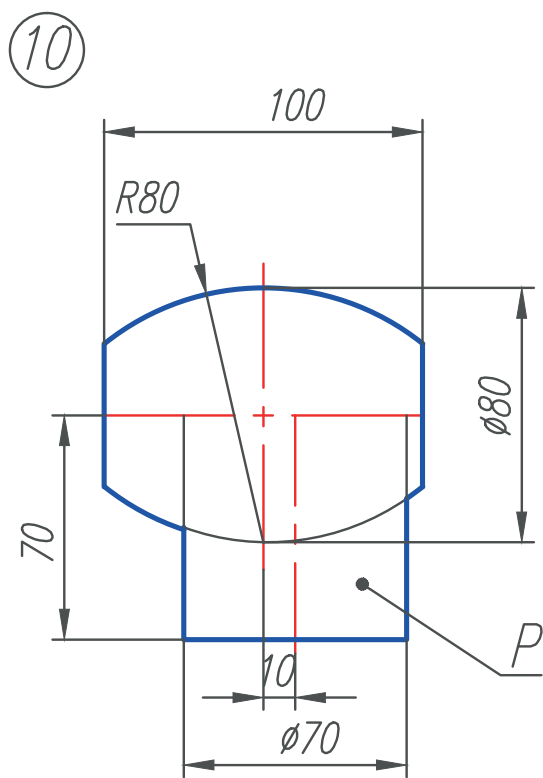
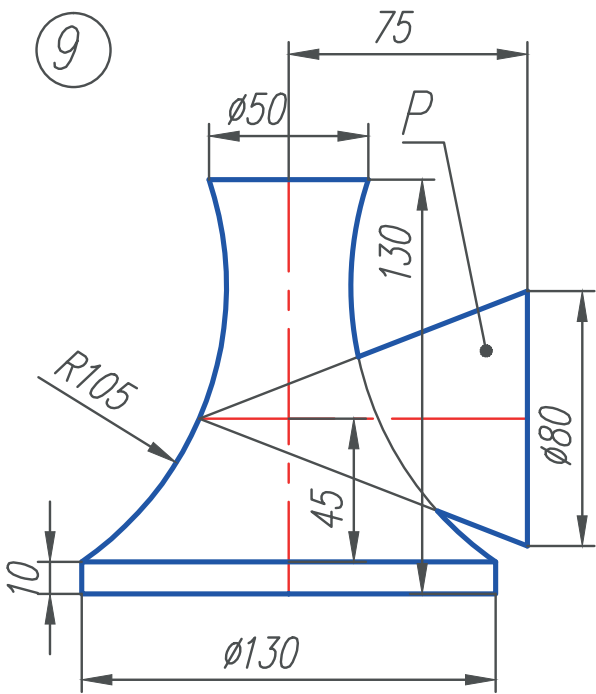
# ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Индивидуальные задания к листу 4 «Взаимное пересечение поверхностей (метод вспомогательных концентрических сфер). Развертка»

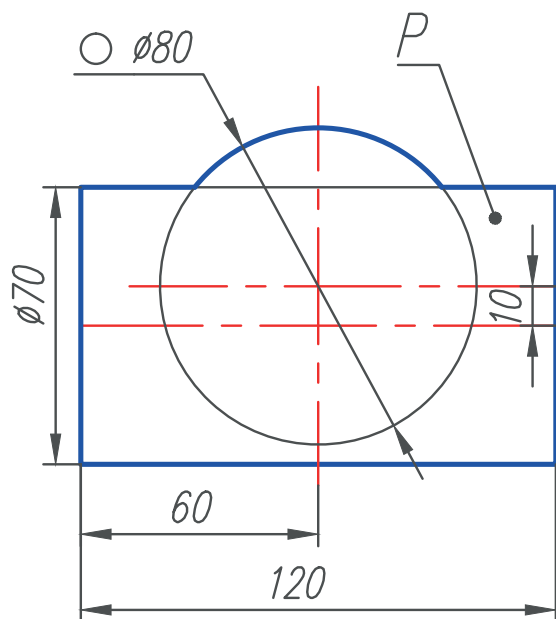




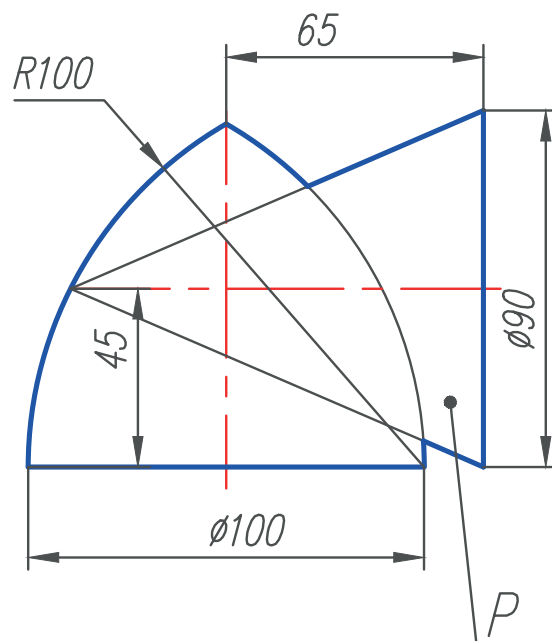




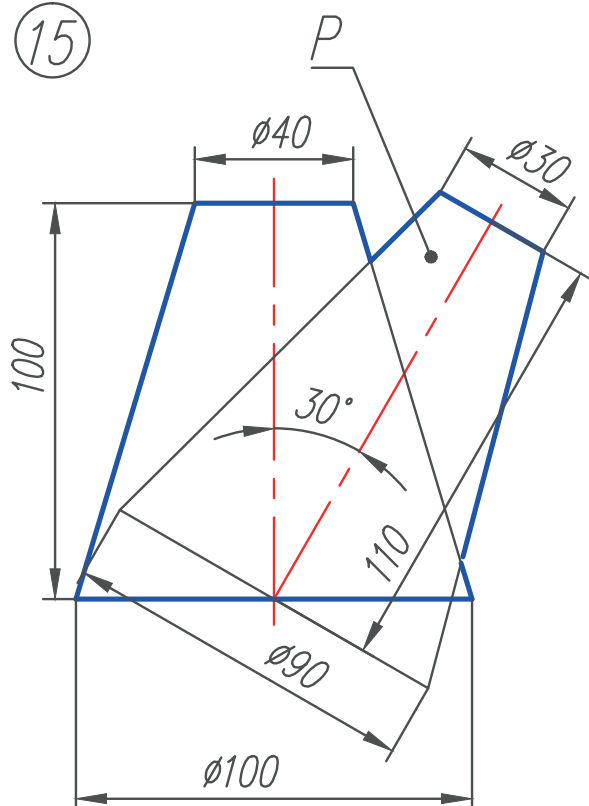
13



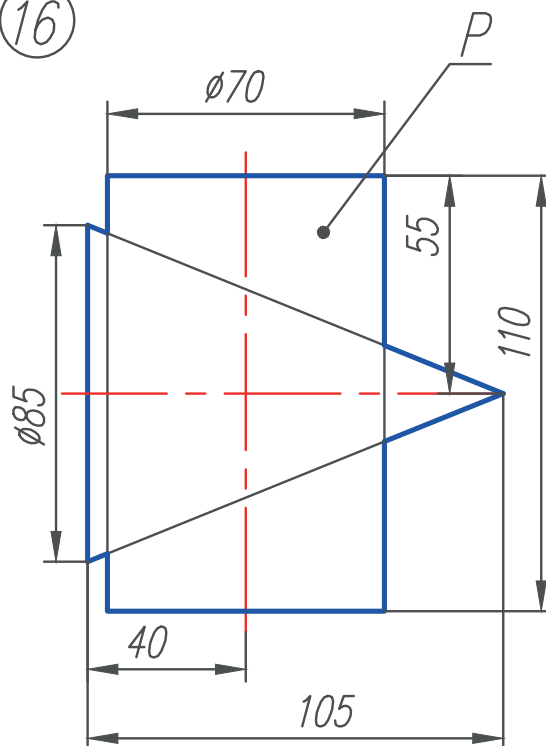
14

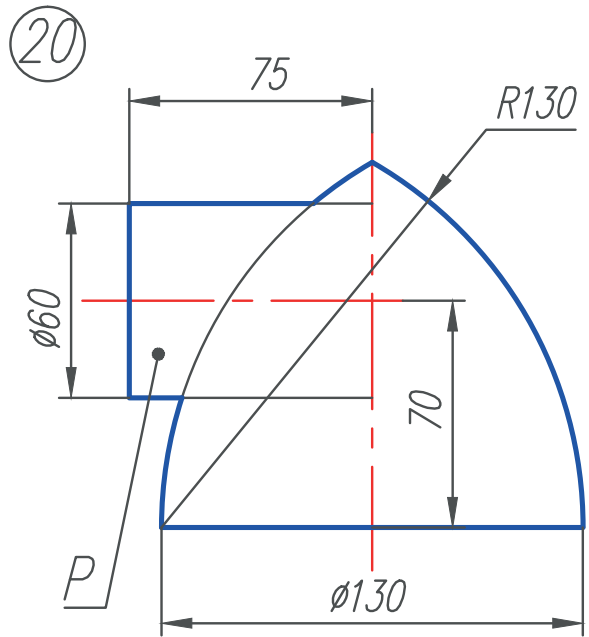
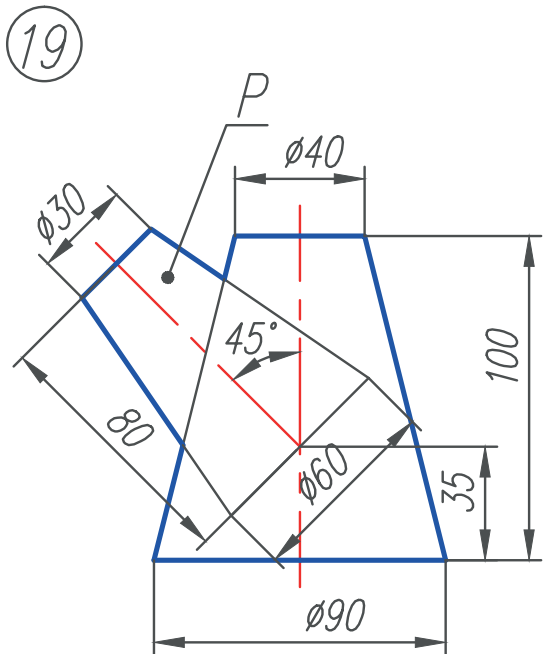
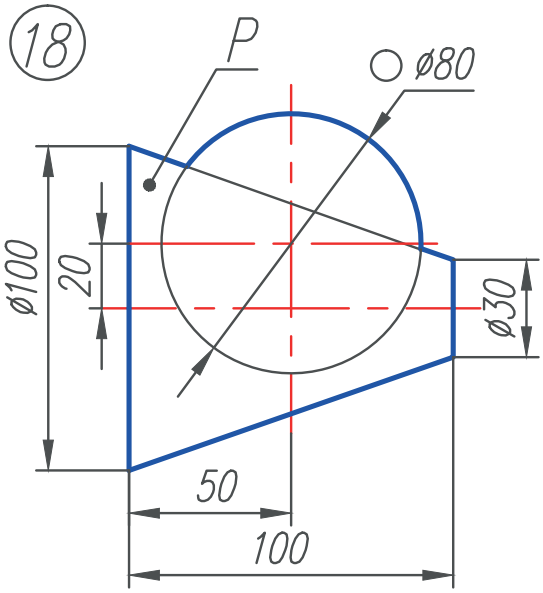
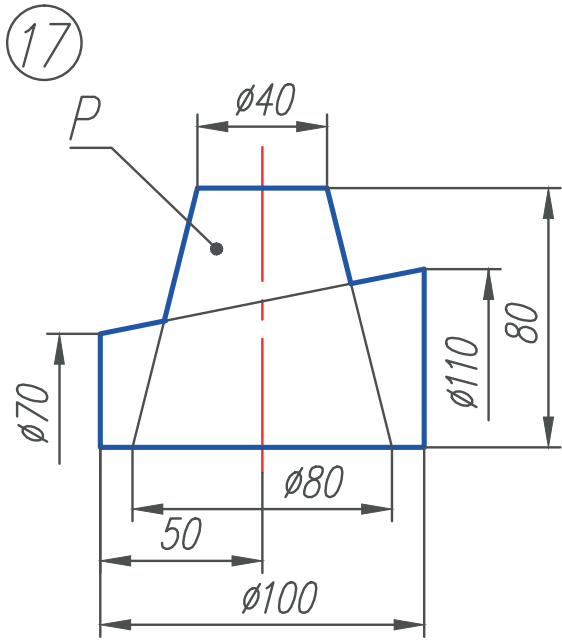


15

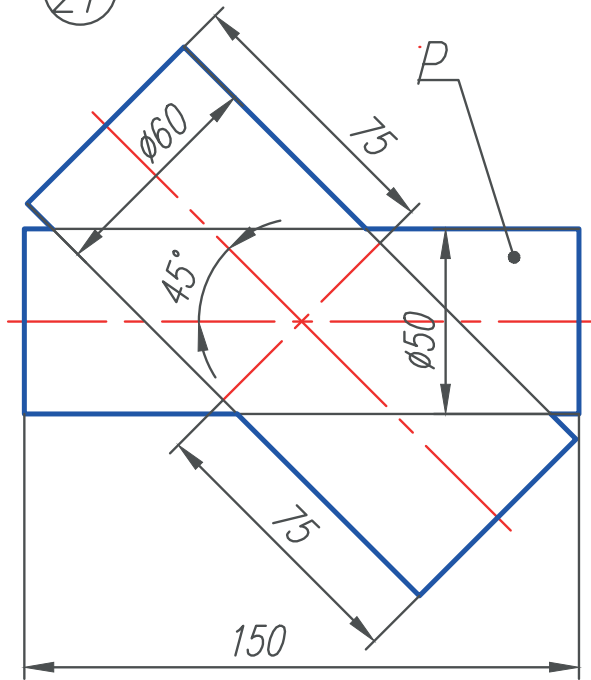


16

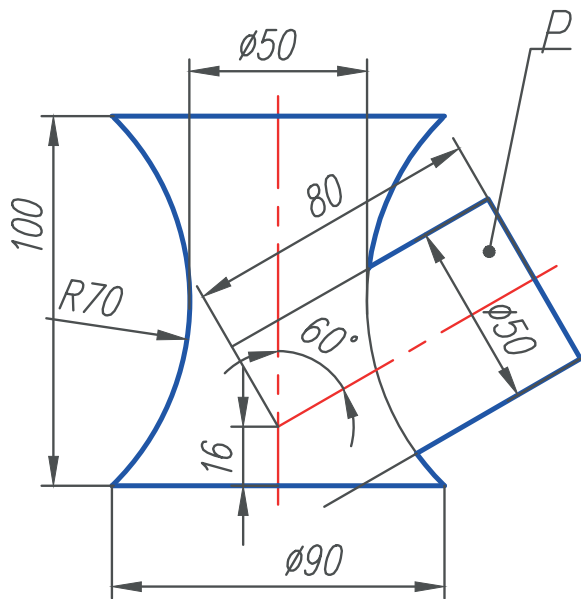




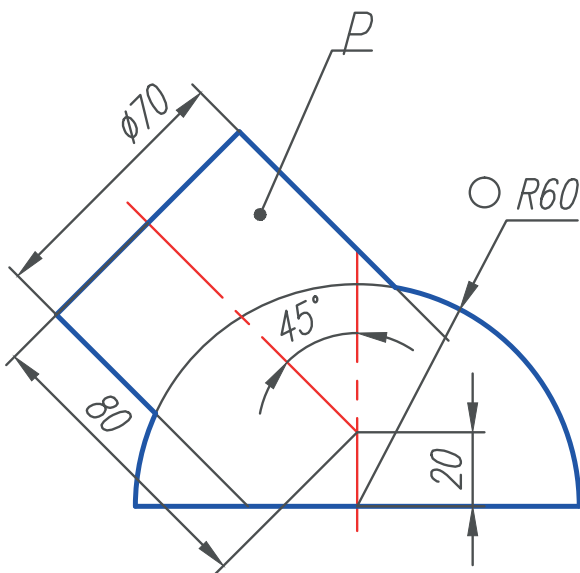
21



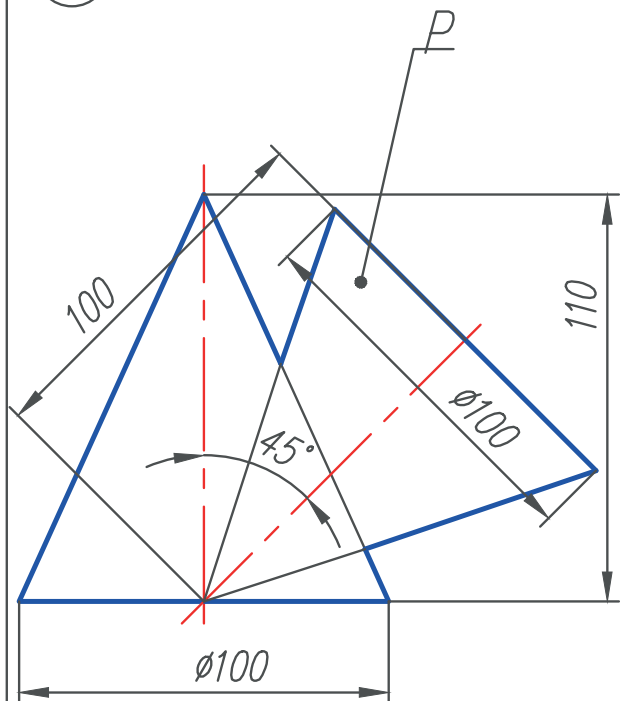
22



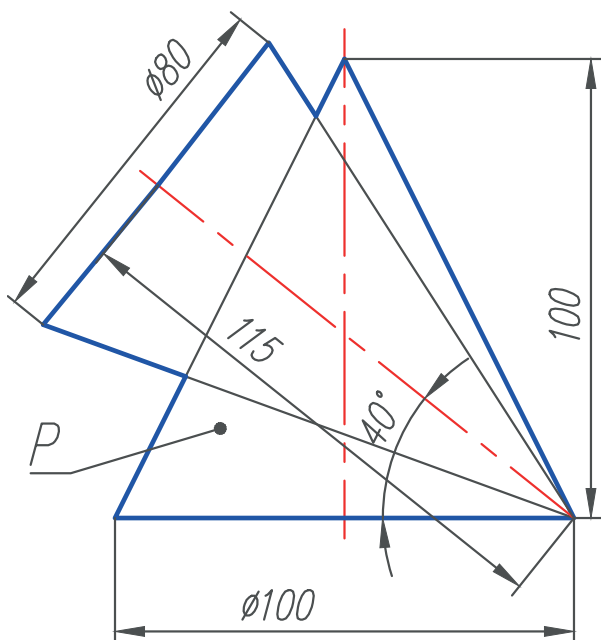
23



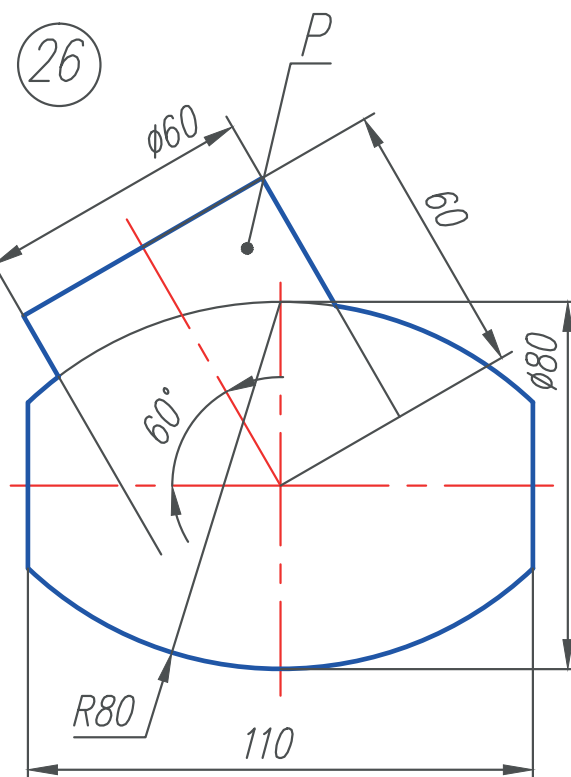
24



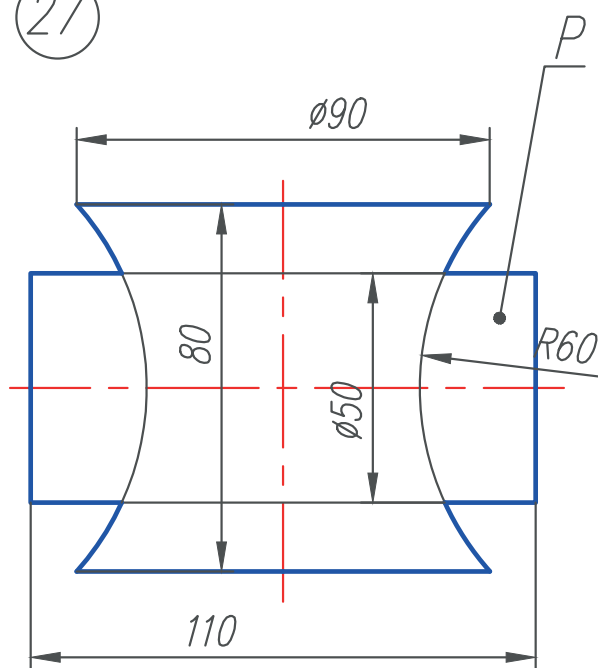
25



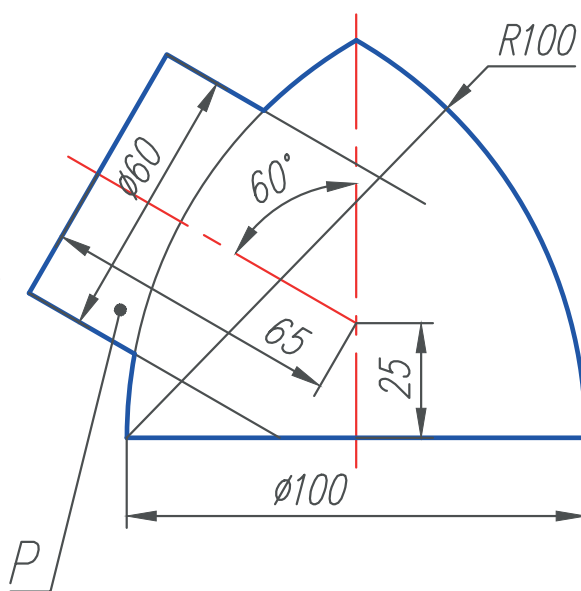
26



27



28



# ПРИЛОЖЕНИЕ 6

## Основные надписи для текстовых и графических документов (ГОСТ 2.104–2006)

Для всех листов можно выбирать готовые форматы с основной надписью.

Форма 1 – для графических документов

Изм/Лист	Итого листов	Лист	Листов	Листов	Листов
Студент		5	5	5	17
Преподаватель		5	5	5	18
Принял		Лист		Листов	
Консультант		20			
Консультант					
Зад. код					

Форма 2 – для первого листа текстовых документов

Изм/Лист	Итого листов	Лист	Листов	Листов	Листов
Студент		15	15	20	
Преподаватель		Лист	Лист	Листов	
Принял					
Консультант					
Консультант					
Зад. код					

Форма 2а – для всех последующих листов текстовых документов

Изм/Лист	Итого листов	Лист	Листов	Листов	Листов
Студент		15	7	10	
Преподаватель					
Принял					
Консультант					
Консультант					
Зад. код					

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ. ВИДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ .....	4
1.1. Центральные проекции .....	4
1.2. Параллельные проекции .....	5
1.3. Прямоугольное проецирование .....	6
2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ .....	7
2.1. Ортогональные проекции точки .....	7
2.2. Прямые общего и частного положений.....	9
2.3. Следы прямой .....	12
2.4. Относительное положение прямых .....	13
Вопросы для самоконтроля .....	15
3. ПЛОСКОСТЬ .....	16
3.1. Способы задания плоскости .....	16
3.2. Плоскости общего положения. Следы плоскости .....	17
3.3. Плоскости частного положения .....	17
Вопросы для самоконтроля .....	20
4. ПОВЕРХНОСТЬ.....	22
4.1. Образование и задание поверхности .....	22
4.2. Поверхности вращения .....	27
4.3. Многогранники .....	27
4.4. Принадлежность точки, прямой линии поверхности .....	29
Вопросы для самоконтроля .....	32
5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....	33
5.1. Сечение поверхности плоскостью .....	33
5.2. Геометрическое тело с вырезом .....	38
5.3. Пересечение поверхности прямой линией.....	39
Задачи для самостоятельного решения .....	41
5.4. Взаимное пересечение поверхностей .....	43
Вопросы для самоконтроля .....	49



6. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ.....	50
Вопросы для самоконтроля .....	51
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ЗАЩИТЫ .....	53
РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	54
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Требования к выполнению курсовой работы «Взаимное пересечение поверхностей в ортогональных и аксонометрических проекциях» .....	55
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Индивидуальные задания к листу 1 «Геометрическое тело с вырезом» .....	76
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Индивидуальные задания к листу 2 «Пересечение поверхности вращения с многогранником» .....	82
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Индивидуальные задания к листу 3 «Пересечение двух поверхностей вращения (способ вспомогательных секущих плоскостей)» .....	89
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Индивидуальные задания к листу 4 «Взаимное пересечение поверхностей (метод вспомогательных концентрических сфер). Развертка» .....	96
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Основные надписи для текстовых и графических документов (ГОСТ 2.104–2006).....	103

*Учебное пособие*

**Сидякина** Татьяна Ивановна  
**Стриганова** Лариса Юрьевна

# **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Редактор *И. В. Меркурьева*  
Верстка *Е. В. Ровнушкиной*

Подписано в печать 27.09.2017. Формат 60×84 1/8.  
Бумага писчая. Цифровая печать. Усл. печ. л. 6,75.  
Уч.-изд. л. 5,2. Тираж 100 экз. Заказ 311.

Издательство Уральского университета  
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5  
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41  
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4  
Тел.: 8 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13  
Факс: 8 (343) 358-93-06  
<http://print.urfu.ru>

*Для заметок*





**СИДЯКИНА ТАТЬЯНА ИВАНОВНА**

Старший преподаватель кафедры инженерной графики. Преподает дисциплины «Технический рисунок», «Начертательная геометрия», «Инженерная графика». Автор ряда учебных пособий. Участник разработки электронного образовательного ресурса «Начертательная геометрия», «Инженерная графика».



**СТРИГАНОВА ЛАРИСА ЮРЬЕВНА**

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры инженерной графики. С 1979 года занимается планированием, организацией и нормированием самостоятельной работы студентов различных направлений. Читает курсы начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графики. Увлекается элементами дизайнерской деятельности.